ベクトルと行列

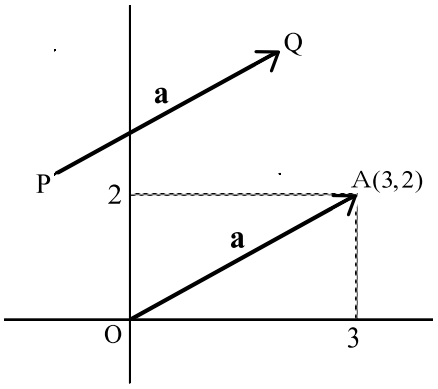
ベクトル（べくとる）

(1) 座標とベクトル

２次元空間の点Ａ（３，２）を図１に描いている。座標Ａは２次元のベクトルである。ベクトルと座標は同じものを表していると言ってよい。その意味については「(５) ベクトルの張る空間 (c)」で説明する。

ベクトルを図示するときは、座標の点だけでは分かりにくいので、原点と座標を結んだ矢印で表している。ただし、幾何学的にベクトルを表現するときは、原点Ｏにこだわる必要はない。図１における $\overrightarrow{PQ}$ のように $\overrightarrow{OA}$ と平行で方向も等ければ同じベクトルを表している。

図1



ベクトルの表記は縦ベクトルを基本とする。また、ベクトルを表示するにはアルファベットの太い小文字を使うことが多い。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

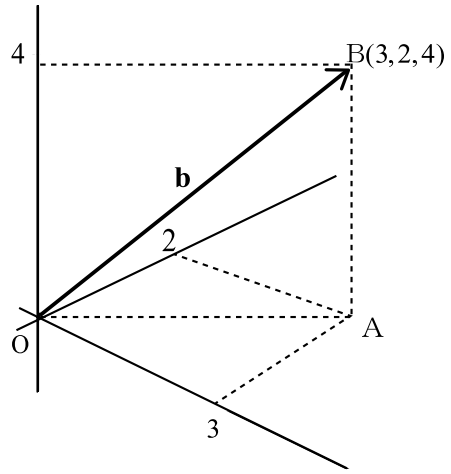
横ベクトルは縦ベクトルの転置として表記する。

$${}^{t}\mathbf{a} \text{ あるいは } \mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

図２は、3次元空間の座標Ｂ（３，２，４）を描いている。

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

図2



(2) ベクトルの長さ

ベクトルの長さは、原点とベクトルが表す座標とを結んだ長さで定義する。ピタゴラスの定理により、ベクトル $\mathbf{a}$ の長さの２乗は $3^2 + 2^2$ である。

ベクトルの長さを $\|\mathbf{a}\|$ という記号で表す。同様に、ベクトル $\mathbf{b}$ の長さの２乗は

$$\|\mathbf{b}\|^2 = 3^2 + 2^2 + 4^2$$

である。

一般に、n 次元空間のベクトル

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

の長さの2乗は、成分の2乗和である。すなわち

$$\|\mathbf{a}\|^2=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2=\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2$$

(3) スカラー

ベクトル **a** を2倍に伸ばす。それは

$$2\mathbf{a}=\begin{bmatrix}2\times3\\2\times2\end{bmatrix}$$

である。ベクトル **a** を逆方向に伸ばす。それは

$$-\mathbf{a}=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$$

である。ベクトルを何倍かすることをスカラー倍という。

n次元空間のベクトルの場合

$$c\mathbf{a}=\begin{bmatrix}ca_1\\ca_2\\\vdots\\ca_n\end{bmatrix}$$

(4) ベクトルの和

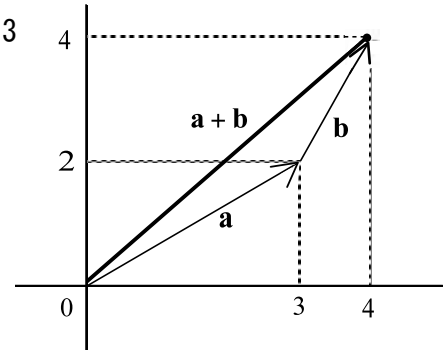
$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}、\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

のとき

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3+1\\2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$$

となる。図3のようにベクトル**a**の先にベクトル**b**をたせばよい。ただし、同じ次元のベクトルでないと、たすことはできない。

図3



差の場合には

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3-1\\2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

一般的に、n次元ベクトルの場合

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}、\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

とする。

$$c\mathbf{a}+d\mathbf{b}=\begin{bmatrix}ca_1+db_1\\ca_2+db_2\\\vdots\\ca_n+db_n\end{bmatrix}$$

n 次元ベクトル $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$ とスカラー $c_1,c_2,\cdots,c_k$ がある。

$$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\cdots+c_k\mathbf{a}_k$$

と表されるものを、ベクトルの一次結合とよぶ。

(5) ベクトルの張る空間

(a) 2次元ベクトル

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}、\ \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

がある。任意の一次結合を $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$ とする。c_1、c_2 を適当に選べば、2 次元空間のすべての座標を表現することができる。このとき、2 次元空間はベクトル $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ で張られているという。通常は、直交する単位ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}、\ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

で 2 次元空間の座標を表現している。

任意の 2 次元ベクトル $\mathbf{a}_3$ は適当な c_1、c_2 で

$$\mathbf{a}_3 = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$$

と表される。このとき、3 つのベクトル $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、$\mathbf{a}_3$ は一次従属であるという。

$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ という 2 つのベクトルの場合には、$\mathbf{a}_1$ は $\mathbf{a}_2$ で表現されない。その逆も言える。この場合、2 つのベクトル $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ は一次独立という。もし

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}、\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$$

であれば、$\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$ となるので、2 つのベクトルは一次従属である。このケースでは $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ で 2 次元空間を張ることはできない。

(b) 3 次元ベクトルの場合、4 個からなるベクトルの組は必ずある 1 個のベクトルが他の 3 個のベクトルで表されるので、一次従属である。 3 個からなるベクトルの組では、それで 3次元空間を張ることができる場合がある。そのとき、3 個のベクトルは一次独立である。もし 2 次元空間あるいは 1 次元空間しか張ることができないならば、3 個のベクトルは一次従属である。

一般的に、n 次元ベクトルの組があるとき、$n+1$ 個以上のベクトルがあれば一次従属である。 n 個のベクトルの組が n 次元空間を張るならば一次独立である。n 次元空間未満であれば一次従属である。

(c) 2 次元ベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}、\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

の例で説明しよう。任意の 2 次元ベクトル $\mathbf{x}$ は適切なスカラーを用いて

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$$

と表現される。これを

$$\mathbf{x}_{[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]\rightarrow} \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

と表し、ベクトル $\mathbf{x}$ は底 $\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\end{bmatrix}$ に関し

$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ に対応するという。

通常の 2 次元座標では、上述した直交する単位ベクトル $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ を用いて、任意の 2 次元ベクトルを

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

と表す。これを

$$\mathbf{x}_{[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2]\rightarrow} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

と表し、ベクトル $\mathbf{x}$ は底 $\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}$ に関し

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ に対応するという。

この意味で「（1）座標とベクトル」で述べたように、ベクトル $\mathbf{x}$ と座標 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ は同じものを表していると言ってよい。

(d) n 次元ベクトルが $r(\le n)$ 個ある。

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$$

を満たすのが、

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$$

のケースしかない場合には、どのベクトルも他のベクトルで表すことができないので、この r 個からなるベクトルの組は一次独立であるという。

もし $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ 以外にもケースがあるならば、あるベクトルは他のベクトルで表すことができるので、一次従属である。

r 個のベクトルが一次独立のとき、r 個のベクトルのランク（階数）は r であるという。そのとき、r 個のベクトルは r 次元空間を張る。

もし r 個のベクトルが一次従属であれば、r 個のベクトルの中から一次独立なものを選び、その最大の数を $r'(< r)$ とする。ランクは r' であり、r' 次元空間を張る。

内積（ないせき）

(1) 内積の定義

2 次元ベクトルで説明しよう。

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}、\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

とする。内積を $\mathbf{a}'\mathbf{b}$ 、$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$ 、$<\mathbf{a},\mathbf{b}>$ などの記号で表現し、

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

と定義する。これは

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

となる。$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ は $\mathbf{a}$ の転置ベクトルである。

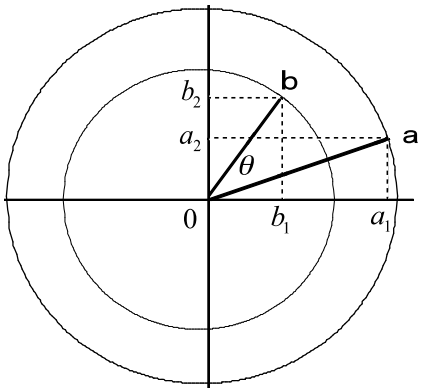
この変形は以下のようにすればよい。図 4 で、ベクトル $\mathbf{a}$ の長さを r_a、角度を φ_a とする。同様に、ベクトル $\mathbf{b}$ の長さを r_b、角度を φ_b とする。ベクトル $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ のなす角を θ とする。

$$a_1 = r_a\cos\varphi_a, \quad a_2 = r_a\sin\varphi_a$$
$$b_1 = r_b\cos\varphi_b, \quad b_2 = r_b\sin\varphi_b$$

したがって

$$\begin{aligned} &a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= r_a r_b\cos\varphi_a\cos\varphi_b + r_a r_b\sin\varphi_a\sin\varphi_b \\ &= r_a r_b\cos(\varphi_a - \varphi_b) \\ &= \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta \end{aligned}$$

図4



n 次元ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}、\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

の内積は

$$\mathbf{a}'\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

と定義する。

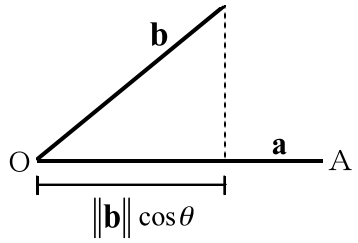
(2) 内積の意味

内積 $\mathbf{a}'\mathbf{b}$ は、図 5 で $\|\mathbf{b}\|\cos\theta$ の力で、長さＯＡを運んだときの仕事量になる。しかし、通常は内積の意味を考慮する必要はない。内積の計算結果はベクトルではなく実数であること、また、内積が 0 であれば

$$\cos 90度 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

であるから、2つのベクトルは直交することを理解すればよい。

図5



行列（ぎょうれつ）

(1) 行列の定義

数字を縦にm個、横にn個並べたものを$m\times n$行列（matrix）という。i行j列の要素をa_{ij}とすると、行列は以下のように表現される。

$$\begin{matrix} & \text{第 } j \text{ 列} \\ \text{第 } i \text{ 行} \rightarrow & \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11}\cdots & \downarrow & \cdots a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1}\cdots & & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

例えば、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

は2×2行列である。

(2) 線分の式

線分ＡＢを表す式を考えよう。例として

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}、\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

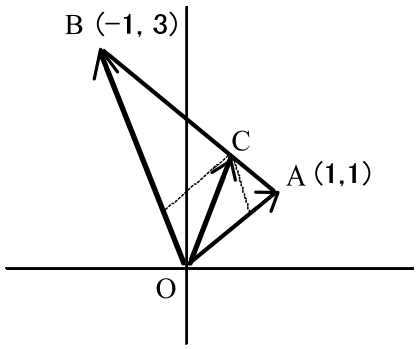
とする。図6で線分ＡＢの内分点Ｃは、ＣからＯＡ、ＯＢに平行線を引くと平行四辺形の頂点になる。ベクトルＯＣを$\mathbf{c}$とする。

$$\mathbf{c} = c\mathbf{a} + (1-c)\mathbf{b} \quad ; \quad 0 \le c \le 1 \qquad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} 2c-1 \\ -2c+3 \end{bmatrix}$$

と表すことができる。

図6



一般的に、ベクトル$\mathbf{a}$で表される座標Ａとベクトル$\mathbf{b}$で表される座標Ｂがあるとき、線分ＡＢは(1)式で表現される。ここでは、2次元空間で説明したが、n次元空間でも成り立つ。

(3) 行列の作用

(a) ベクトルに対する行列の作用をみよう。例として

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

とする。ベクトルに作用する行列の演算を以下のように定義する。$\mathbf{A}$の横ベクトルを $\mathbf{a}_1' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{a}_2' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$とする。

$\mathbf{x}_1$への作用は

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1'\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{a}_2'\mathbf{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 1 + 2\times 1 \\ 1\times 1 + 2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_2$への作用は

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1'\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{a}_2'\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times(-1) + 2\times 3 \\ 1\times(-1) + 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_1$および$\mathbf{x}_2$を両端とする線分$\mathbf{x}$は

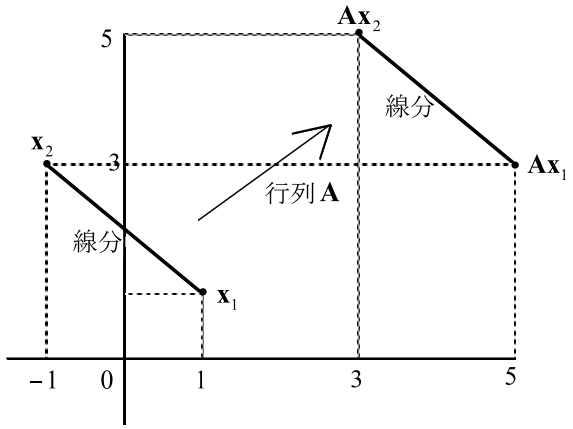
$$\mathbf{x} = c\mathbf{x}_1 + (1-c)\mathbf{x}_2 \quad ; \quad 0 \le c \le 1$$

この線分に行列$\mathbf{A}$を作用させると

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}\left\{c\mathbf{x}_1 + (1-c)\mathbf{x}_2\right\} \\ &= c\mathbf{Ax}_1 + (1-c)\mathbf{Ax}_2 \quad ; 0 \le c \le 1\end{aligned} \tag{2}$$

したがって、作用した結果は$\mathbf{Ax}_1$と$\mathbf{Ax}_2$を両端とする線分である。すなわち、行列とは線分を線分に変換する作用素といってよい。そのとき (2) 式が成り立つ。これを一次写像または線形写像という。図 7 を参照して下さい。

図7



(b) 一般的にベクトル$\mathbf{x}$の写像 $f(\mathbf{x})$ があるとき、任意のcについて次の条件を満たすものを一次写像 (linear mapping) という。

$$f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$$
$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$$

言い直せば、任意のc_1、c_2について次式が成り立つものである。

$$f(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1 f(\mathbf{x}_1) + c_2 f(\mathbf{x}_2)$$

行列は一次写像であるが、任意の一次写像は行列で表現できることが証明される。したがって、行列と一次写像は同等のものとみなしてよい。

(4) 行列のランク

行列のランクは、行列を構成しているベクトルの組のランクとして定義する。上述の例では、行列 $\mathbf{A}$ を構成しているベクトル

$$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

は一次独立であるので、ランクは 2 である。行列$\mathbf{A}$のランクが r であれば、

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r$$

と書く。

上述の例の行列 $\mathbf{A}$、およびベクトル$\mathbf{x}_1$、$\mathbf{x}_2$ のほかに$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$としよう。

$\mathbf{Ax}_3 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ となる。すなわち、ベクトル

$\mathbf{x}_1$、$\mathbf{x}_2$、$\mathbf{x}_3$で作る三角形が行列$\mathbf{A}$の作用によって、再び三角形に変換される。ランク2の行列によって変換されたものは 2次元の図形になる。図 7 に書き込むのが複雑になるので、各自試してみてください。

もし$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 2\\6 & 4\end{bmatrix}$ならば、$\mathbf{A}$を構成している 2 つのベクトルは一次従属になるので、ランクは 1 である。ベクトル$\mathbf{x}_1$、$\mathbf{x}_2$、$\mathbf{x}_3$で変換されたベクトルは

$$\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

となり、直線上に並ぶので線分になる。すなわち、1 次元の図形になる。

一般的に、n 次元ベクトル$\mathbf{x}$に$m \times n$ 行列$\mathbf{A}$を作用させよう。 $\mathbf{Ax}$ はm次元ベクトルになる。

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r(\leq m,n)$$

とすれば、n 次元図形を r 次元図形に変換する。

行列の演算（ぎょうれつのえんざん）

(1) 行列の和

(a) $m\times n$ 行列の i 行 j 列の要素を a_{ij} とする。これを $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ と表すことにする。

$$c\mathbf{A}=\left[c\,a_{ij}\right]$$

(b) $m\times n$ 行列 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ を i 行 j 列の要素で $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$、$\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]$ と表そう。

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$$

(2) 行列の積

(a) $m\times p$ 行列 $\mathbf{A}$ および $p\times n$ 行列 $\mathbf{B}$ がある。積 $\mathbf{AB}$ は $m\times n$ 行列になる。i 行 j 列の要素であらわすと

$$\mathbf{AB}=\left[\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right]$$

すなわち

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}a_{11}\cdots\cdots a_{1p}\\ \vdots\qquad\quad\vdots\\ a_{i1}\cdots\cdots a_{ip}\\ \vdots\qquad\quad\vdots\\ a_{m1}\cdots\cdots a_{mp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}\cdots b_{1j}\cdots b_{1n}\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\ b_{p1}\cdots b_{pj}\cdots a_{pn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1'\\ \vdots\\ \mathbf{a}_i'\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m'\end{bmatrix}\left[\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_j\cdots\mathbf{b}_n\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1'\mathbf{b}_1\cdots\cdots\mathbf{a}_1'\mathbf{b}_n\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ \mathbf{a}_i'\mathbf{b}_j\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ \mathbf{a}_m'\mathbf{b}_1\cdots\cdots\mathbf{a}_m'\mathbf{b}_n\end{bmatrix}$$

(b) $m=n$ でなければ、積 $\mathbf{BA}$ は定義できない。また、$\mathbf{BA}$ が定義できたとしても、

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$$

は一般的に言えない。

例として

$$\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times1+2\times4&3\times2+2\times5\\1\times1+2\times4&1\times2+2\times5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11&16\\9&12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times3+2\times1&1\times2+2\times2\\4\times3+5\times1&4\times2+5\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&6\\17&18\end{bmatrix}$$

(3) 正方行列

(a) 縦と横が等しい $n\times n$ 行列を n 次正方行列という。

(b) 正方行列のうち、対角要素がすべて１であり、その他の要素がすべて0である行列を単位行列といい、通常 $\mathbf{I}$ または $\mathbf{E}$ で表す。

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&&\ddots&\vdots&\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$$

(c) 行列 $\mathbf{A}$ に行列 $\mathbf{B}$ をかけたとき、積が単位行列になるとする。行列 $\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ の逆行列といい、$\mathbf{A}^{-1}$ とかく。$\mathbf{B}$ が逆行列であれば、$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$ および $\mathbf{BA}=\mathbf{I}$ である。

逆行列が存在する行列を正則行列（non-singular matrix）という。また、逆行列が存在しない行列を特異行列（singular matrix）という。

例として、$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$の逆行列を求めよう。逆行列を $\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$ とする。

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

これは

$$3b_{11}+2b_{21}=1,\quad 3b_{12}+2b_{22}=0$$
$$b_{11}+2b_{21}=0,\quad b_{12}+2b_{22}=1$$

を解けばよい。結果は

$$b_{11}=\frac{2}{4}\quad b_{21}=\frac{-1}{4}\quad b_{12}=\frac{-2}{4}\quad b_{22}=\frac{3}{4}$$

行列で書くと

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}\times\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\times\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$|\mathbf{A}|$ は行列式で、この場合は

$$|\mathbf{A}|=3\times 2-2\times 1=4$$

である。

また、$\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ の各要素は行列 $\mathbf{A}$ の余因子で表現される。$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ の場合には

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\times\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\times\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22}\end{bmatrix}$$

ここで Δ_{ij} は a_{ij} の余因子である。余因子を並べた行列は転置されていることに注意。余因子については後述する。

n 次正方行列についても、同様の考え方で求められる。

(d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ の逆行列を求めてみよう。

$$|\mathbf{A}|=3\times 4-6\times 2=0$$

となるので、逆行列は存在しない。

n 次正方行列のランクが n よりも小さい場合には、逆行列は存在しない。その場合、行列式は 0 となる。

(e) n 次正方行列 $\mathbf{A}$ の第(i,j)余因子Δ_{ij}は、行列式$|\mathbf{A}|$から第 i 行、第 j 列を除いて

$$\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}a_{11}\cdots\downarrow & \cdots a_{1n}\\ \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ a_{m1}\cdots & \cdots a_{mn}\end{vmatrix}\leftarrow$$

第j列を除く

第i行を除く

と定義される。

(f) 1 次正方行列の行列式は$|a_{11}|=a_{11}$。

$(k-1)$次まで計算できれば、k次の行列式を

$$|\mathbf{A}|=a_{11}\Delta_{11}+a_{12}\Delta_{12}+\cdots+a_{1k}\Delta_{1k}$$

と定義すればよい。ちなみに、2 次および 3 次の行列式は

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{23}a_{12}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

連立1次方程式(れんりついちじほうていしき)

(1) 2変数

(a) 例として、次の連立方程式を解いてみよう。

$$3x_1 + 2x_2 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 = 4$$

ベクトルで書き直すと

$$x_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

行列で書き直すと

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ は一次独立であるから、張る空間は 2 次元である。したがって、$\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$ は一次独立な 2 個のベクトルの一次結合で表されるので、$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 以外の解がある。

左から逆行列をかけると

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\times\begin{bmatrix}2 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

(b) 例として $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 2\\6 & 4\end{bmatrix}$ で、

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

を解いてみよう。行列 **A** のランクは 1 であるから、張る空間は 1 次元である。張る空間に $\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$ があれば、解は存在する。

張る空間になければ解は存在しない。3 個のベクトル $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$ の張る空間は 2 次元であるので、$\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$ は行列 **A** の張る空間にはない。したがって、解は存在しない。

(c) $\begin{bmatrix}3 & 2\\6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$ のケースでは、行列 **A** のランクは 1 であり、かつ 3 個のベクトル $\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$ の張る空間もランク 1 であるので、解が存在する。

$3x_1 + 2x_2 = 5$ を満たす (x_1, x_2) であれば、どれも解になる。したがって、$\begin{bmatrix}c\\\frac{5}{2} - \frac{3}{2}c\end{bmatrix}$ (c は任意の値) であり、解空間を形成する。

(2) n 変数

一般的に、n 次正方行列 **A** および n 次元ベクトル **b**、**x** があるとき、$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ の解を求めよう。

(a) 行列 **A** のランクが n であれば、**A** の逆行列が存在し、$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ となる。したがって、一意的な解が求められる。

(b) 行列 **A** のランクが $r(< n)$ であれば、2 つのケースに分かれる。

＊ $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < \mathrm{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ のケース。行列 **A** の張る空間の中に **b** が入っていない。したがって、**b** を加えたときランクが上がる。それゆえ、行列 **A** からなるベクトルの一次結合として **b** は表現されないので、**x** の解は存在しない。

＊ $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ のケース。行列 **A** の張る空間の中に **b** が入っている。したがって、**b** を加えたときランクは上がらない。それゆえ、行列 **A** からなるベクト

ルの一次結合として $\mathbf{b}$ は表現されるので、$\mathbf{x}$ の解は存在する。

ただし、$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r(< n)$ であるので、実質的な方程式は r 個であり、残りの $n-r$ 個の方程式は実質的な方程式から導き出される。それゆえ、$n-r$ 個の変数の値を適当に与えれば、残りの r 個の変数の値が定まる。解は $n-r$ 次元空間になる。

(3) $m \times n$ 行列

変数が n 個、方程式が m 個のケースで、

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r\left[\leq \min(m,n)\right]$$

である。（２）のケースと同様に、$\mathrm{rank}(\mathbf{A})$ と $\mathrm{rank}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ を比較する。

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < \mathrm{rank}(\mathbf{A},\mathbf{b})$$

の場合には、解は存在しない。

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A},\mathbf{b})$$

の場合には、解は存在して、解空間は $n-r$ 次元になる。

固有値（こゆうち）

(1) 固有値と固有ベクトルの計算

項目「行列」で、行列はベクトルに作用する一次写像であると説明した。n 次正方行列は n 次元ベクトルを n 次元ベクトルに変換する作用素である。ある行列 $\mathbf{A}$ はある特定のベクトルについては、その同じベクトルのスカラー倍に変換しうる。それを求めてみよう。

(a) 例として $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を取り上げよう。

$\mathbf{x}$ を2次元ベクトル、λ をスカラーとする。

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad (1)$$

となる λ および $\mathbf{x}$ を求める。λ を固有値（eigen value）、$\mathbf{x}$ を固有ベクトル（eigen vector）という。

(1) 式を変形すると

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

例のケースでは

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

書き直すと

$$(3-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0$$

x_2 を消去して整理すると

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1)x_1 = 0$$

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を求めるので、$\lambda = 4$ または $\lambda = 1$ である。

$\lambda = 4$ のとき $x_1 = 2x_2$、$\lambda = 1$ のとき $x_1 = -x_2$ である。したがって、解は固有値４のとき固有ベクトルは $c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$、固有値１のとき固有ベクトルは $c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である。ここで c_1、c_2 は 0 以外の任意の値。

(b) 固有値の一般的な解法をみよう。

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を求めるので、(2) 式で $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ の逆行列は存在しない。もし逆行列が存在すれば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ になる。したがって、行列式＝0を解けばよい。

$$\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0$$

これを固有方程式という。例のケースでは

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 \times 2$$
$$= (\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$$

n 次正方行列の固有方程式は、λ の n 次方程式になる。代数学の基本定理によれば、複素数の範囲で重複解まで含めれば、n 個の解を持つ。しかし、実用的側面からは、実数解の範囲に限定される。

(c) 例のケースで固有ベクトルを並べた行列を

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

としよう。$\mathbf{P}$ の逆行列との関係で c_1、c_2 が消えるので、ここではそれを省略した。

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2\times 1-(-1)\times 1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

2つの固有値を λ_1、λ_2 とすると、この例では行列 $\mathbf{A}$ を正則行列 $\mathbf{P}$ で対角化できる。

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

(d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ のケース。$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$

を解くと、$\lambda=3$ で重複解になる。これに対応する固有ベクトルは $c\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$（$c$ は 0 以外の任意の値）であり、１つしかない。したがって、$\mathbf{P}$ は正則行列ではなく $\mathbf{A}$ を対角化できない。

一般的に、n 次正方行列が相異なる n 個の実数からなる固有値をもてば、対角化できる。固有値が重複している場合、その値に対する一次独立な固有ベクトルが重複個数だけあれば対角化できる。なければ、対角化できない。

(e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ のケース。$\mathbf{A}$ のランクは１である。

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 6 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

を解くと $\lambda=7$ および 0 である。対応する固有ベクトルは $c_1\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$、$c_2\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$ である。

（c_1、c_2 は 0 以外の任意の値）。

$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ とすると、$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

となる。

一般的に、n 次正方行列のランクが $r(\le n)$ であり、かつ、対角化されるならば、0 をとる固有値が $n-r$ 個ある。

２次形式（にじけいしき）

(1) 直交行列

図８は、(x_1, x_2)座標の上に描いた半径１の円である。２次元平面の正規直交基底として

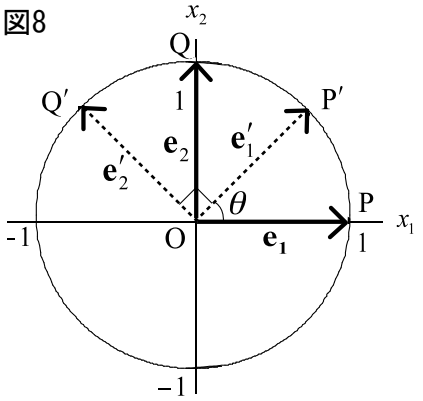
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\ 、\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

をとる。すなわち、$\mathbf{e}_1$と$\mathbf{e}_2$は直交し、かつ、それぞれの長さは１である。その基底を θ 回転させたのが $\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$、$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ である。そのベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\mathbf{e}_1'=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}、\ \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=\mathbf{e}_2'=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

になる。

図8



正規直交基底からできる行列

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

を直交行列という。

$$\mathbf{T}'\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

したがって、$\mathbf{T}'=\mathbf{T}^{-1}$である。

n 次元空間の n 個の正規直交基底からなる行列も同様に直交行列になる。

(2) 対称行列

2 次正方行列 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ は $a_{12}=a_{21}$ のとき対称行列である。n 次正方行列を i 行 j 列の要素で $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ と表そう。すべての (i,j) について $a_{ij}=a_{ji}$ であれば対称行列である。

(3) 対称行列の固有値と固有ベクトル

例として $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ のケースをみよう。

固有値は $\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$ を解いて $\lambda=-1$ および -3 である。固有ベクトルは

$c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$、$c_2\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$($c_1$、$c_2$は0以外の任意の値)。

$$\mathbf{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

とする。$\mathbf{T}$ は直交行列になるから $\mathbf{T}'=\mathbf{T}^{-1}$ である。

項目「固有値(1)(d)」で述べたように、2 次正方行列で相異なる 2 つの実数固有値をもつので、$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$ は対角行列になる。

一般的に、n 次正方行列が対称行列であれば、固有値はすべて実数であり、重複解まで含めれば、固有値はn個ある。また、それぞれに対応する固有ベクトルは直交する。

固有ベクトルの長さを 1 に基準化すれば、n 個の正規直交基底からなる行列$\mathbf{T}$は直交行列になる。$\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}$ は対角行列になり、対角要素は固有値である。

(4) 2 次形式

$\mathbf{A}$ を n 次対称行列、$\mathbf{x}$ を n 次元ベクトルとする。$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ で表される式を 2 次形式という。例として 2 次元のケースをみよう。

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=a_{11}x_1^{\,2}+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^{\,2}$$

一般的に n 次対称行列は直交行列で対角化される。直交行列を $\mathbf{T}$ とし、$\mathbf{y}=\mathbf{T}'\mathbf{x}$ とおく。

$\mathbf{T}'=\mathbf{T}^{-1}$ であるから $\mathbf{x}=\mathbf{T}\mathbf{y}$ 。

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}'(\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y}=\lambda_1 y_1^{\,2}+\cdots+\lambda_n y_n^{\,2}$$

例として $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ のケースでは、

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = -2x_1^{\,2} + 2x_1x_2 - 2x_2^{\,2}$$
$$= \mathbf{y}'(\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y} = -y_1^{\,2} - 3y_2^{\,2}$$

ただし、$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ である。

ベクトル・行列の数式（べくとる・ぎょうれつのすうしき）

(1) 内積

＊シュワルツの不等式　$|\mathbf{a}'\mathbf{b}| \le \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$

＊ $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とする。

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$$

(2) 行列

＊ n 次正方行列 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ について転置行列は、$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$

＊ n 次正方行列 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ について逆行列は、$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(3) トレース

n 次正方行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ に対して、対角成分の和を $\mathbf{A}$ のトレースといい、$\mathrm{tr}\mathbf{A}$ で表す。

＊ n 次正方行列 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ について、

$\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathrm{tr}\mathbf{B}$

＊ n 次正方行列 $\mathbf{A}$ および数 c について、

$\mathrm{tr}(c\mathbf{A}) = c\,\mathrm{tr}(\mathbf{A})$

＊ $m \times n$ 行列 $\mathbf{A}$ および $n \times m$ 行列 $\mathbf{B}$ について、$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

(4) 行列式

＊ n 次正方行列 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ について、

$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|$

＊ n 次正方行列 $\mathbf{A}$ が正則行列でないならば、$|\mathbf{A}| = 0$

＊ n 次正方行列 $\mathbf{A}$ が正則行列ならば、

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

＊ n 次直交行列 $\mathbf{T}$ について、$|\mathbf{T}| = 1$

(5) 微分

＊ n 次正方行列 $\mathbf{A}$ および n 次元ベクトル $\mathbf{x}$ について、

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}'、\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}、\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{A}')\mathbf{x}$$

とくに $\mathbf{A}$ が対称行列の場合には、

$$\frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

＊ n 次元空間から m 次元空間への写像 f が、n 次元ベクトル $\mathbf{x}$ で微分可能ならば、導写像は

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

これをヤコビアン行列という。

ギリシャ文字の読み方（ぎりしゃもじのよみかた）

文字		読み	文字		読み
A	α	アルファ	N	ν	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	クシー，グザイ
Γ	γ	ガンマ	O	o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π	パイ
E	ε	イプシロン	P	ρ	ロー
Z	ζ	ゼータ	Σ	σ	シグマ
H	η	イータ	T	τ	タウ
Θ	θ	シータ	Υ	υ	ウプシロン
I	ι	イオタ	Φ	$\varphi(\phi)$	ファイ
K	κ	カッパ	X	χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ϕ	プサイ
M	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ