数学・情報を読むために

論理記号（ろんりきごう）

命題論理記号は、∧（かつ）、∨（または）、→（ならば）、¬（でない）からなり、述語論理記号は、∀（任意）、∃（存在）からなる。命題論理記号と述語論理記号をあわせて論理記号という。

日常言語における「かつ」、「または」、「ならば」、「でない」は人によってその解釈が異なることがあるかもしれない。しかし、命題論理記号の「∧」、「∨」、「→」、「¬」には曖昧な部分はなく数学的に厳密に定義される。$p \wedge q$はpとqが共に真であるときにのみ真である。$p \vee q$はpとqの少なくとも一方が真のときのみ真である。$p \to q$はpが偽のときは常に真、pが真のときはqが真のときのみにかぎり真である。（たとえば、私が米国大統領にならないと断言できる場合、「私が米国大統領になったら世界はひっくり返る」という文章は真である。）$\neg p$はpが偽のときにのみ真である。以上のことから命題論理におけるよく知られた性質、たとえば、ドモルガンの法則「$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$，$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$」、対偶「$p \to q \Leftrightarrow (\neg q) \to (\neg p)$」などが数学的に証明できる。

次に述語論理記号について説明する。変数xに関する性質$P(x)$に対して、どんなxに対しても$P(x)$が成り立つことを$\forall x P(x)$と書く。また、$P(x)$が成り立つようなxが存在することを$\exists x P(x)$と書く。たとえば、「どんなxにもそれより小さいyが存在する」という文は論理記号を用いて「$\forall x \exists y (y<x)$」と書ける。また、「ある$x$が存在してどんな$y$も$x$以下である」という文は「$\exists x \forall y (y \leqq x)$」と書ける。

一般に、述語論理記号で書かれた文が正しいかどうかはどのような世界（モデル）で考えているかによる。たとえば、$\forall x \exists y (y<x)$は実数の世界では正しいが、自然数の世界では正しくない。なぜならば、自然数の世界では1より小さい数は存在しないからである。

置換（ちかん）

集合Aと集合Bの直積集合$A \times B$の部分集合RをAとBの間の**関係**という。RをAとBの間の関係とするとき、Aの任意の元aに対して$(a,b) \in R$を満たすBの元bがちょうどひとつ存在するとき、RをAからBへの**写像**という。AからBへの写像fがAの元aをBの元bに対応させているとき、$f(a)=b$とかく。任意のBの元bに対して$f(a)=b$を満たすaが存在するとき、fはAからBへの**上への写像**という。任意のAの元a, a'に対して、$a \neq a'$ならば常に$f(a) \neq f(a')$を満たすとき、fはAからBへの**１対１写像**という。fをAからBへの写像、gをBからCへの写像とするとき、任意のAの元aに対して$c=g(f(a))$となる元cがちょうどひとつ存在する。つまり$y=g(f(x))$はAからCへの写像となっている。この写像をfとgの**合成写像**といい、$g \cdot f$とかく。

AからAへの1対1上への写像をA上の**置換**という。Aが2つの元のみからなるとき、A

上の置換を**互換**という。置換の理解を助ける具体例のひとつとしてアミダクジがある。アミダクジは並べられたn個のものに対してアミダクジを実行することで並びかえる働きをもつと考えることができる。たとえば、3個のものを並べかえるアミダクジで1,2,3番目のものがそれぞれ2,3,1番目に並びかえられた場合、そのアミダクジは$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=1$を満たす集合$\{1,2,3\}$上の置換と考えられる。

置換に関する基本的な性質として、集合$\{1,2,\cdots,n\}$上の置換は隣り合う数同士の互換の合成で表すことができる、という定理が知られている。アミダクジにおいて隣り合う数同士の互換はアミダクジの横棒に対応する。よってこの定理はアミダクジの言葉で言い換えれば、うまく横棒を引けばどのように並べかえることもできるということを主張しているに過ぎない。

実数（じっすう）

1,2,3,…のように1から始まる数を**自然数**といい、自然数全体の集合を$\mathbb{N}$で表す。$0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$のように自然数に0および負の数を加えた数を**整数**といい、整数全体の集合を$\mathbb{Z}$で表す。n/m（n,mは整数、$m\neq0$）のように整数の分数で表わされた数を**有理数**といい、有理数全体の集合を$\mathbb{Q}$で表す。

これらの包含関係は$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$である。高校までで学習する数で、自然数でも整数でも有理数でもない数として、たとえば$\sqrt{2}$や円周率πなどがある。ともに$\mathbb{Q}$に含まれないが$\mathbb{Q}$に含まれる数の列の極限となっている。このように、有理数ではないが有理数の無限列の極限になっている数を**無理数**という。そして$\mathbb{Q}$に無理数を加えた数を**実数**といい、実数全体の集合を$\mathbb{R}$で表す。

集合Aから自然数全体の集合$\mathbb{N}$への１対１上への写像が存在するとき、Aは**可算集合**であるという。可算でない無限集合を**非可算集合**という。$\mathbb{Z}$および$\mathbb{Q}$は可算であることが確かめられる。一方、$\mathbb{R}$は非可算であることが知られているが、その証明にはカントールの対角線論法と呼ばれる証明法が用いられる。

集合$A\subset\mathbb{R}$が演算$f(x,y)$に関して**閉じている**とは、任意の$a,b\in A$に対して$f(a,b)\in A$が成り立つことである。四則演算$x+y,x-y,x\times y,x\div y$も演算の一種である。$\mathbb{N}$は＋,×に関して閉じているが、－,÷に関して閉じていない。$\mathbb{Z}$は＋,×,－に関して閉じているが、÷に関して閉じていない。$\mathbb{Q},\mathbb{R}$はともに＋,－,×,÷に関して閉じている。

以上のことより、実数と有理数は四則演算に関して類似した性質をもつが、$\mathbb{Q}$が可算であるのに対し$\mathbb{R}$が非可算であることが実数と有理数の大きな違いのひとつであることがわかる。

指数・対数（しすう・たいすう）

正の実数aと実数xに対して、aを底とするxの指数a^xは次のように定義される。

(1)xが自然数のとき、a^xはaのx個の積。（ただし、$a^0=1$。）

(2)xが正の有理数p/q（$p,\ q$は自然数）のとき、$a^x=(\sqrt[q]{a})^p$。

(3)xが正の無理数のとき、$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{x_n}$。（ただし、$\{x_n\}$は$x$に収束する正の有理数列。）

(4)xが負の実数のとき、$a^x=1/a^{-x}$。

正の実数 a,b と実数 x,y に対して、次の３つの性質が成り立つ：$a^xb^x=a^{x+y}$、$(a^x)^y=a^{xy}$、$(ab)^x=a^xb^x$。これらの性質をまとめて**指数法則**という。

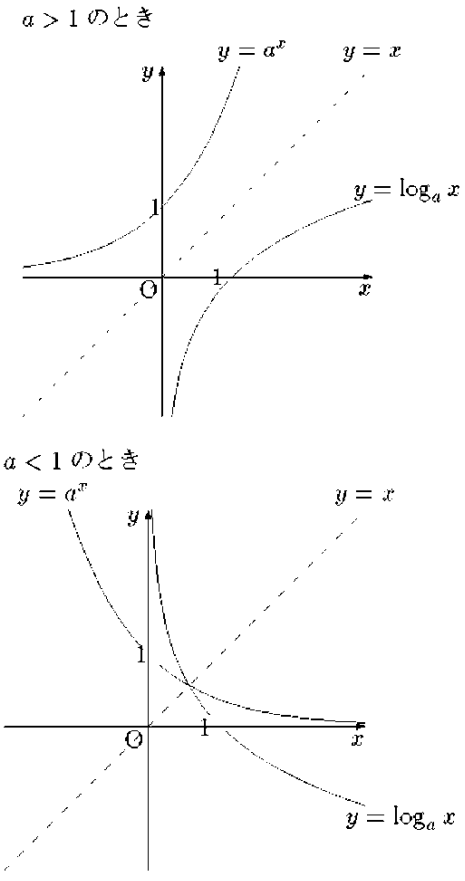
1 でない正の定数 a に対して、関数 $f(x)=a^x$ を、a を底とする**指数関数**という。

1 でない正の実数 a と正の実数 x に対して、$x=a^y$ を満たす実数 y の値を、a を底とする x の**対数**といい、$\log_a x$ と書く。このとき x を真数という。

1 でない正の実数 a と正の実数 x,y,z に対し、次の３つの性質が成り立つ：$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$、$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$、$\log_a x^z=z\log_a x$。

1 でない正の定数 a に対して、関数 $f(x)=\log_a x$ を、a を底とする**対数関数**という。

対数関数 $f(x)=\log_a x$ は指数関数 $f(x)=a^x$ の逆関数になっている。それぞれのグラフは以下の通り。



自然対数（しぜんたいすう）

n に関する式 $(1+1/n)^n$ に $n=1,2,3\cdots$ と代入していくと、$(1+1/1)^1=2$, $(1+1/2)^2=9/4=2.25$, $(1+1/3)^3=64/27\fallingdotseq 2.37\cdots$ となり、少しずつその値が増えていくのがわかるであろう。しかしながら、その増え方は徐々に小さくなり、やがては一定の値 $2.71828\cdots$ 収束していくことが知られている。この値を**ネイピア数**といい、e で表す。すなわち $e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ である。そして e を底とする対数 $\log_e x$ を**自然対数**といい、e を省略して $\log x$ と書く。（ちなみに、10 を底とする対数 $\log_{10} x$ を常用対数という。）

ネイピア数 e の定義から $\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h=1$ が成り立つことが確かめられる。このことより、微積分の重要な性質である $(e^x)'=e^x$, $(\log x)'=1/x$ が導かれる。

ネイピア数 e は自然科学や社会科学に限らず、様々なところに顔を出す。たとえば、n 人でランダムにプレゼントを交換するとき、場合によっては自分の用意したプレゼントを引き当ててしまうこともあるであろう。そうならないような交換を成功した交換と呼ぶことにする。このとき、交換が成功する確率は n が大きくなると $1/e$（$\fallingdotseq 0.37$）に収束することが知られている。さらには、n が 5 以上でも約 0.37 であることも確かめられる。つまり、5 人でプレゼント交換をしようとも、地球上のすべての人々でプレゼント交換をしようとも、3 回に 1 回ぐらいは成功することがわかるのである。

微分・積分（びぶん・せきぶん）

自然科学や社会科学などで扱われる関数の多くは、グラフを書くと滑らかな曲

線となる。そのような良い特徴を持った関数$y=f(x)$と実数aに対して、(aとは異なる) 実数xを限りなくaに近づけていくと、$(a,f(a))$と$(x,f(x))$を結ぶ直線の傾き

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

の値は「曲線 $y=f(x)$の $x=a$における接線の傾き」に限りなく近づいていくこととなる。この極限値は「関数$y=f(x)$の$x=a$における**微分係数**」と呼ばれる。各点aに「関数$y=f(x)$の$x=a$における微分係数」を対応させる関数は$y=f(x)$の増加・減少の様子を把握するために必要不可欠な情報を持っていることになる。この重要な関数は$y=f(x)$の**導関数**と呼ばれていて

$$\frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{d}{dx}f(x)\ ,\ f'(x)$$

のように表記される。一般的に，導関数を計算することを**微分**と呼ぶ。

正の値をとる連続な関数$y=f(x)$について、区間［a,b］においてx 軸と曲線$y=f(x)$で囲まれた領域の面積は「関数$y=f(x)$の［a,b］における(リーマン)**積分**」と呼ばれ

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

と表記される。(負の値をとる関数の積分は、領域の面積の値を負に反転する。) この積分の概念と上で説明された微分の概念の間には、以下に示すように、密接な関係が知られている。

導関数が$y=f(x)$となる関数は$y=f(x)$の**原始関数**と呼ばれ、原始関数を計算することは微分の計算の逆の操作に相当している。(原始関数は複数存在し、$y=f(x)$の全ての原始関数の集合は$y=f(x)$の**不定積分**と呼ばれる。) そして、この原始関数の計算は積分の概念と本質的に同じものとなる。実際に、定数aをどのように定めてもxに関する関数

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

が$y=f(x)$の原始関数である (つまり

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

が成り立つ) ことが保証されている。
また、逆に $y=F(x)$ を $y=f(x)$ の原始関数の1つとすると、$y=f(x)$の積分は$y=F(x)$を用いて

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

のように記述できることが保証されている。こうした性質は**微分積分学の基本定理**と呼ばれている。

偏微分・全微分 (へんびぶん・ぜんびぶん)

1変数関数$y=f(x)$のグラフがxy 平面上の滑らかな曲線となる時、この曲線の$x=a$における傾きは微分係数と呼ばれる1つの実数$f'(a)$で表現され、その傾きを持った直線 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$は$(a,f(a))$において丁度$y=f(x)$に接していることとなる。この考え方を自然に拡張して、多変数関数に対する傾きの概念を考えてみると議論は若干複雑になる。

話を簡単にするために、2変数関数に限定して説明すると、様々な分野で扱われる2変数関数$z=f(x,y)$のグラフは (山の斜面のように) xyz 空間中に埋め込まれた滑らかな曲面の形をしている。これに対して1変数関数に関する議論からの類推で、xy 平面上の点 (a,b)に (x,y)を限りなく近づけていった時に、「曲面上の

2点$(a,b,f(a,b))$と$(x,y,f(x,y))$を結ぶ直線の傾き」が近づいていく値を観察してみると、その値は(x,y)が(a,b)に近づく道筋に依存して変化し固定された値とならないことが分かる。(山の斜面に立って、様々な方向を眺めてみると、眺めた方角によって坂道の勾配が異なっていて、その傾きを1つの数値で言い尽くせないことが分かる。)そこで、先ずは2つの標準的な道筋に注目して傾きを考えることにして、y座標をbに固定して(x,y)をx軸と平行に(a,b)に近づけていくことによって観測される傾き

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

を「関数 $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ におけるxに関する**偏微分係数**」と呼び、x座標をaに固定して(a,y)をy軸と平行に(a,b)に近づけていくことによって観測される傾き

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

を「関数 $z=f(x,y)$の $(x,y)=(a,b)$における y に関する**偏微分係数**」と呼ぶ。また､各点に対して「xに関する偏微分係数」を対応させる関数は$z=f(x,y)$のxに関する**偏導関数**と呼ばれ、

$$\frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\ ,\ f_x(x,y)$$

のように表記され、同様に「y に関する偏微分係数」を対応させる関数は
$z=f(x,y)$の y に関する**偏導関数**と呼ばれ、

$$\frac{\partial z}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\ ,\ f_y(x,y)$$

のように表記される。

上のように滑らかな曲面上の1点$(a,b,f(a,b))$に接する2方向の傾きが測定されると、それらの傾きを持った平面
$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(y-b)$ は$(a,b,f(a,b))$において丁度$z=f(x,y)$に接していることとなる。一般的に、このように接平面が存在する時に「$z=f(x,y)$は$(x,y)=(a,b)$で**全微分可能**である」といい、曲面の傾きを特徴付ける2つの偏微分係数の組$(f_x(a,b),f_y(a,b))$は
「 $z=f(x,y)$の$(x,y)=(a,b)$ における**全微分係数(勾配ベクトル)**」と呼ばれる。

全微分可能性は(合成関数の微分など)多くの状況で前提として要求される重要な性質であり、応用上利用される多くの多変数関数がそのような良い特徴を備えている。

合同式(ごうどうしき)

自然数nと整数a,bに対して、$a-b$がnの倍数になっているとき、aとbはnを**法として合同**であるといい、$a\equiv b\pmod n$と書く。

整数の定数a,bに対して、$ax\equiv b\pmod n$を**1次合同式**という。1次合同式の解はnを法として、ちょうどひとつ存在、複数個存在、存在しない、の3つの場合がある。たとえば、$5x\equiv 2\pmod 8$の解は$x\equiv 2\pmod 8$であり、8を法としてちょうどひとつ存在する。$6x\equiv 5\pmod 8$の解は存在しない。$2x\equiv 4\pmod 8$の解は$x\equiv 2,6\pmod 8$であり、8を法として複数個存在する。一般に以下の定理が成り立つ。整数c, dに対してcとdの公約数で最大のものを最大公約数といい、(c,d)で表す。このとき

定理　1次合同式$ax\equiv b\pmod n$に対して
(1)解が存在する ⇔ (a,n)はbの約数

(2)解が存在するならばnを法として(a,n)個存在する。

共通の変数xをもつ有限個の1次合同式の集まりを**連立合同式**という。たとえば、$x\equiv5 \pmod 9$, $x\equiv7 \pmod{11}$は連立合同式であり、その解は$x\equiv95 \pmod{99}$である。1次合同式と同様、連立合同式の解もある数を法として、ちょうどひとつ存在、複数個存在、存在しない、の3つの場合がある。以下、簡単のため、2つの1次合同式の連立合同式を考える。整数c, dに対して、cとdの正の公倍数で最小の数を最小公倍数といい、$[c,d]$で表す。このとき以下が成り立つ。

定理　連立合同式$x\equiv a \pmod n$, $x\equiv b \pmod m$に対して

(1)解が存在する $\Leftrightarrow a\equiv b \pmod{(m,\ n)}$

(2)解が存在すれば、その解は$[m,\ n]$を法として一意的である。

オイラーグラフ（Eulerian graph）

頂点集合Eと辺集合Vからなる数学的構造$G=(E,V)$を一般に**グラフ**という。辺に方向があるグラフを**有向グラフ**、方向がないグラフを**無向グラフ**という。頂点集合のサイズが有限であるグラフを**有限グラフ**という。ここでは有限無向グラフを単にグラフと呼ぶことにする。

グラフGの異なる辺の列$v_0v_1\cdots v_n$をGの**小道**といい、特に$v_0=v_n$のときは**閉小道**という。グラフGのすべての辺を通る閉小道をGの**オイラー閉小道**といい、オイラー閉小道が存在するようなグラフを**オイラーグラフ**という。与えられたグラフがオイラーグラフかどうかを判定する定理として「グラフGがオイラーグラフであることとGの各頂点の次数は偶数であることは同値である」というオイラーの定理が知られている。ここでグラフの頂点vの次数とは、vと隣接している辺の総数をいう。

この定理の応用として、たとえば「ある町のすべての道をちょうど1回だけ通って元の場所に戻ってくることは可能か」という問題を考えてみる。町の広さによるが、実際にすべての経路を調べることは一般に大変な作業である。そこでオイラーグラフを用いてみる。まず交差点を頂点とみなし、ある交差点から次の交差点までの道を辺とみなすことで、町全体をグラフと考えることができる。そこで、各交差点からのびている道の本数をかぞえ、その本数がすべて偶数であったら、オイラーの定理よりこの問題の答えはYesであり、ひとつでものびている道の本数が奇数である交差点があったならば答えはNoである。答えがYesの場合はオイラーの定理のみからではその経路はわからないが、その経路を実際求めるアルゴリズムも知られている。　以上のように、オイラーグラフは様々な分野で用いられ、その応用も広い。

最適化理論（さいてきかりろん）

社会の様々な問題に対して「何らかの意志決定をしなければならない時」や「物事を効率よく処理する方法を見つけなければならない時」などに、その答を科学的手法に基づいて導き出すというアプローチがとられることがある。実際に、そのような考察の起源は、1930年代のイギリスで行われた「ドイツからの攻撃に備えたレーダーの効果的な運用方法の研究」にあるとされている。その後、こうした手法は主に経営の分野に受け入

れられ、現在では、経営効率の改善を図る科学として**オペレーションズリサーチ**と呼ばれる大きな学問領域を形成している。

オペレーションズリサーチにおける主要な課題の一つとして、「与えられた条件を守りながら、最も優れた効果を上げる方法を発見すること」があり、このタイプの問題に限定した研究分野は最適化理論と呼ばれている。例えば、出張を行う際に、路線探索プログラムを用いて出張先までの最短経路を調べることがあるが、それは「鉄道路線を利用するという条件の下で、最も所要時間の短い経路を発見する」といった問題に関する最適化理論の成果をコンピュータ上で動作させていることに他ならない。

こうした路線探索問題も含めて、最適化理論における考察対象は、全て「制約条件と呼ばれる限られた範囲からなる集合の中で、目的関数と呼ばれる効果の尺度を表す関数の値を最も高くする元（最適解）を見つける」という数学の問題として定式化される。その上で、各問題は、制約条件と目的関数の構造に応じて細かく分類されることとなる。

具体的に、最適化理論で扱われる問題は、**連続的最適化問題**と**離散的最適化問題**に分類され、前者においては扱うデータが（実数のように）連続濃度を持ち、後者においては扱うデータが（整数のように）離散濃度を持つ、といった違いがある。そして、更に、連続的最適化問題は**線形計画問題**と**非線形計画問題**に、離散的最適化問題は**整数計画問題**や**ネットワーク計画問題**などに細分され、各々の問題が持っている特徴を最大限に利用した様々な解法アルゴリズムが開発されている。

線形計画法の基本定理（せんけいけいかくほうのきほんていり）

高校数学の中で扱われる最適化問題の具体例として以下のような問題がある.

ある工場では、2種類の原料A,Bから2種類の製品X,Yを生産していて、製品Xを1kg生産するのに3kgの原料Aと3kgの原料Bを使用し、製品Yを1kg生産するのに4kgの原料Aと1kgの原料Bを使用する。また、1kgの製品Xから得られる利益が20000円であり、1kgの製品Yから得られる利益が10000円であるとする。工場に原料A、Bの在庫が各々80kg、56kgある時に、この工場の得られる利益の最大値とその時のX,Yの生産量を求めよ。

製品X,Yの生産量を各々$x$kg, $y$kg、原料A,Bの余剰量を各々$a$kg, $b$kgとおくことによって、上の問題は「非負変数 x, y, a, b に対して、

$3x + 4y + a = 80$

$3x + y + b = 56$

の条件下で$20000x+10000y$の最大値とその時のx,yの値を求めよ」といった問題に書き換えられる。このように「制約条件と目的関数が１次式で記述できる特殊な形式の連続的最適化問題」は線形計画問題と呼ばれている。（数学において、線形とは１次式や直線を意味する用語と考えてよい。）最適生産計画を求める問題の他にも、様々な問題がこのような形式に還元されることが知られている。そのため、線形計画問題の最適解を効率的に算出する手法の確立は重要な課題となっていて、そうした手法は線形計画法と呼ば

れている。

一般に、線形計画法の制約条件は不能な連立方程式の形をしていて、条件を満たす変数値の組合せは無数に存在するが、幾つかの変数値を強制的に0に固定すると、残りの変数値は唯一に固定される。（例えば、上の問題についてx=0，y=0と固定すると、残りの変数の値はa=80，b=56に固定される。）この種の強制の下で得られる変数値の組合せは基底解と呼ばれている。基底解に関しては「線形計画問題に最適解が存在するときは必ず基底解の中から最適解を見つけることができる」といった重要な性質が知られていて、この性質は線形計画法の基本定理と呼ばれている。

微分積分の基本定理や代数学の基本定理といったように、数学の多くの分野では、その理論の礎となる最も重要な性質を基本定理と呼ぶ慣習がある。線形計画法の分野でも、基本定理の主張は非常に重要な意味を持ち、これによって最適解の存在範囲を有限に絞り込むことが可能となる。

シンプレックス法（しんぷれっくすほう）

線形計画法の基本定理から、任意の線形計画問題に対して、「確実に停止して最適解を算出するアルゴリズム」の存在が保証される。実際に、基底解の総数は常に有限個なので、その中から最適解を虱潰しに探せば十分である。しかし、こうした素朴な方針の下では、変数や制約条件式の増加に伴って、調べるべき基底解の総数が飛躍的に増加するという問題が生じる。例えば、変数の総数が$2n$で制約条件式の総数がnの場合には、（$2n$個の変数の中からn個の値を0に固定して1つの基底解を得ることになるので）調べるべき基底解の総数は$2nCn$となる。そして、$2nCn$は指数関数よりも増加の早い関数であり、計算量理論の視点から「nの値が大きくなると、こうした虱潰しによるアルゴリズムは使い物にならない」と判断されることとなる。

このような背景の下で、「基底解の中から最適解を素早く見つける手法の確立」が試みられるようになり、その一つの成果として、1947年にG.B.Dantzigによって考案されたシンプレックス法（単体法）と呼ばれるアルゴリズムが広く知られるようになった。

シンプレックス法の基本的な考え方は、適当な基底解から出発して、それを改善することによってより優れた基底解を見つけていきながら最終的に最適解に辿り着くというものである。例えば、「線形計画法の基本定理」の項の中で取り上げた線形計画問題には、基底解の一つとして（x，y，a，b）=（0，0，80，56）があった。これに対して、「Xを1kg増産してAを3kg、Bを3kg消費すると、利益は20000円増加し損失は全く生じない」ことと「Yを1kg増産してAを4kg、Bを1kg消費すると、利益は10000円増加し損失は全く生じない」ことが分かる。そこで、両者を比較して「より利益の大きいXを可能な限り増産する」という戦略を立て、その結果として、新たな基底解（x，y，a，b）=（56/3，0，24，0）を得ることができる。そして、以後も、同様の改善を繰り返していけば徐々に利益の高い計画に辿り着くことになる。

計算量クラス（けいさんりょうくらす）

今日では、数多くの問題に対して、コンピュータ上でプログラムを実行して答を求めることが普通に行われるようになった。それに伴い、各問題に対して「その答を求めるプログラムを構築することが可能か否か？」といった問題と並行して「プログラムを構築できたとしても、それが使用する資源（計算時間やメモリ消費量など）が現実的な範囲に納まるか否か？」といった実用的視点も考慮されるべき課題となってきている。例えば、素因数分解を行うプログラムは誰でも簡単に作成できるが、それらは全てある程度大きな自然数が入力されると答を算出するまでに時間が掛かり過ぎてしまい実用には耐えられないものとなるであろう。（実際に、現時点では、実用的な時間で素因数分解を行うアルゴリズムの存在は知られていない。）

理論計算機科学の計算量理論と呼ばれる分野において、こうした計算の効率に関する研究が行われていて、様々な問題に内在する普遍的な複雑さ（計算機アーキテクチャやプログラミング言語等の技術の進歩に依存しない問題自体が本質的に持っている複雑さ）の評価が行われている。

具体的に「計算時間の視点から見た問題Qの複雑さ」については、入力データの増加に伴う計算時間の増加を関数として捉えることにして、「問題Qの時間計算量が関数fで抑えられる」ということを「長さnの入力データが与えられた時に、常に機械語命令の実行数が$f(n)$以下でQの答を算出するようなプログラムを作成できる」こととして定義する。

その上で、様々な問題の複雑さに応じて時間計算量クラスと呼ばれる複雑さの階層が定義されている。その中でも、多項式で時間計算量を抑えることのできる問題の集まりをP（**決定性多項式時間計算可能問題**のクラス）と呼び、理論上はPに属する問題のみを「実用的なプログラムを構築できる問題」と認める立場が取られている。（逆に、指数関数など増加の速い関数でしか抑えられない問題は、実用的なプログラムを構築することが絶望的であるとみなされる。）

線形計画問題の計算量については、シンプレックス法を用いた場合でもその時間計算量を多項式で抑えることはできないことが知られている。（但し、そのような最悪のケースは非常に稀であるため、実用上の問題は殆ど生じないとされている。）これに対して、1984年にN.Karmarkarにより**内点法**と呼ばれる理論的にも実用的にも優れたアルゴリズムが考案され、現在は、線形計画問題は計算量クラスPに属する問題であることが保証されている。

NP完全問題（えぬぴーかんぜんもんだい）

計算量クラスに関しては、現在でも解明されていない問題が数多く存在する。特に、過去数十年にわたって、様々な分野において「実用的なプログラムを構築できるか否かが全く分からない問題」が多数確認されるようになった。こうした問題を総体的に観察すると、それらは何れも「入力された問題データに対応して、ある条件を満たす解データが存在するか否か？」を問う形式を持っていて、

長さnの問題データに対して、常に

(1)解が存在するならば、その長さは $f(n)$ 以下に抑えることができる。

(2)実際に、解の候補が与えられた時に、「それが解になるか否か？」の判定にかかる時間計算量は $g(n)$ で抑えることができる。

といった性質を満たす多項式 f, g が存在することが知られている。

例えば、入力データとして鉄道の路線図が与えられた時に「ある駅から出発して全ての駅を丁度１回通過して元の駅まで戻ってくる道順（**ハミルトン閉小路**と呼ばれる）は存在するか否か？」を判定する問題は上の性質を満たしていていることが分かる。（実際に、ハミルトン閉路の長さは路線図に現れる駅の総数程度で与えられる。また、解の候補として道順のデータが与えられたとしたら、それに従って実際に路線図を辿ってみるだけで、容易にハミルトン閉路となっているか否かの判定ができる。）

このような特徴を持った問題の集まりはNP（**非決定性多項式時間計算可能問題**のクラス）と呼ばれている。計算量クラスNPの構造に関する最も基本的な問題は「NPに属する問題の全てに対して、その答えを算出する実用的なプログラムを構築できることができるのか否か？」を明らかにすることであるが、この問題は**P=NP問題**と呼ばれていて、現在の数学・理論計算機科学において最も重要な未解決課題の一つとされている。

このように計算量クラスNPの構造を解明する上で、「NPの中でも最も複雑さの度合いが高いタイプの問題」が重要な意味を持っていて、それらはNP完全問題と呼ばれている。実際に、NP完全問題のうち１つでもよいから効率的なプログラムを作成することができないことを証明できればP=NP問題は否定的に解決され、逆に、1つでもよいから効率的なプログラムを作成することができればP=NP問題は肯定的に解決されることとなる。こうした背景の下で、精力的に研究が行われたこともあり、現在では数千に及ぶNP完全問題が認識されていて、上にあげたハミルトン閉路の問題もNP完全問題の一つであることが知られている。