数式

数学記号（すうがくきごう）

（1） 順列と組合せ

(a) n 個の相異なる要素の並べ方は $n!$（n の階乗）通りある。

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

(b) n 個の相異なる要素から x 個を取り出す。順番も考慮した並べ方（順列）は

$${}_nP_x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

(c) n 個の相異なる要素から x 個を取り出す。順番は考慮しないで要素の組合せが違う取り出し方（組合せ）は

$${}_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

${}_nC_x$ は $\binom{n}{x}$ と書くことが多い。

（2） 和の演算記号

(a) 同じパターンの和を表す演算記号として $\sum$ を用いる。たとえば $x_\bullet$ というパターンの和が1から n 個まであれば

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

ここで i の代わりに k でも a でも何でもよい。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{a=1}^{n} x_a$$

たとえば $(x_\bullet - 5)^2$ というパターンの和が 3 から 6 個まであれば

$$\sum_{i=3}^{6} (x_i - 5)^2 = (x_3 - 5)^2 + (x_4 - 5)^2 + (x_5 - 5)^2 + (x_6 - 5)^2$$

(b) 値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均 $\overline{x}$ 、分散 s^2 は

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

(c) 自然数のベキ和

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

（3） 積の演算記号

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \bullet x_2 \bullet \cdots \bullet x_n$$

展開式（てんかいしき）

（1） 二項展開

n を正の数とするとき

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\bullet\cdots\bullet(n-k+1)}{1\bullet 2\bullet\cdots\bullet k}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

(2) テーラー展開

(a) 関数 $f(x)$ を a のまわりでテーラー展開すると

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+\cdots$$

ここで $f^{(n)}(a)=\left.\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=a}$

(b) $a=0$ のときマクローリン展開とよばれることもある。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)x^n+\cdots$$

(c) 代表的な関数のテーラー展開は

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad |x|<\infty$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots,\quad -1<x\le 1$$

$$\log x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}+\cdots,\quad 0<x\le 2$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad |x|<\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad |x|<\infty$$

三角関数（さんかくかんすう）

(1) 三角関数の定義

図 1 で

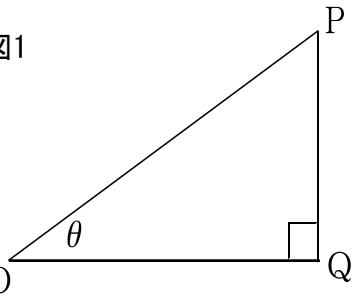
$$\sin\theta=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}},\quad \cos\theta=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$$

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OQ}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \operatorname{cosec}\theta=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{\sin\theta}$$

図1



一般的な定義は図 2 を参照。半径 1 の円を描き、反時計回りに角度 θ をとる。時計回りの場合、角度はマイナスになる。

$$\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x$$

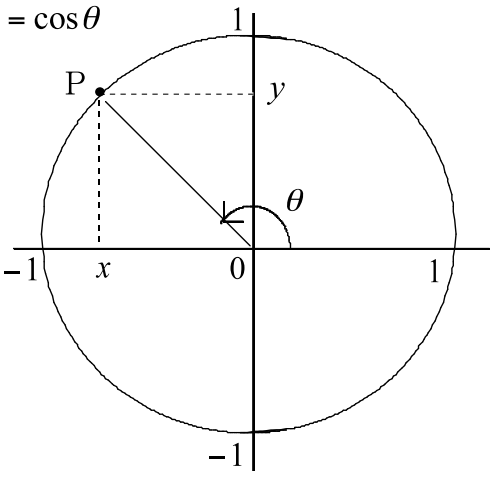
$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

したがって

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

図2



（2）角度の変換

θラジアン$=\dfrac{180}{\pi}\theta$度

90度$=\dfrac{\pi}{2}$ラジアン，180度$=\pi$ラジアン

360度$=2\pi$ラジアン

（3）三角関数の関係式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$
$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$$

指数と対数（しすうとたいすう）

この項は「数学・情報を読むために」の項目「指数・対数」および項目「自然対数」を参照。

（1）定義

$a>0$ を実数とするとき a^x を指数関数という。また、$\log_a x$を対数関数という。

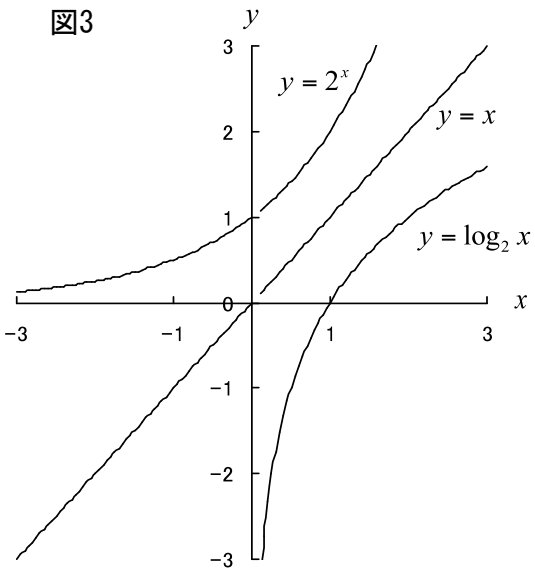
$$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$$

と表す。したがって

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

である。$y=a^x$ と $y=\log_a x$ は逆関数であり、45 度線（$y=x$）に関して線対称になる。図３は底 $a=2$ のケースである。

図3



（2）指数関数の性質

$$a^x\times a^y=a^{x+y}$$
$$a^x\div a^y=a^{x-y}$$
$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}$$
$$(a^x)^y=a^{xy}$$
$$a^0=1$$

（3）対数関数の性質

$$\log_a(x\times y)=\log_a x+\log_a y$$
$$\log_a(x\div y)=\log_a x-\log_a y$$
$$\log_a x^b=b\log_a x$$
$$\log_a 1=0$$

（4）自然対数

無理数である $e=2.71828\cdots$（ネイピア数）を底とする対数を自然対数という。

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

で定義される。

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$
$$\frac{d\log_e x}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

が言える。

対数の底を a とするとき、

$$\frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{\log_e a} \times \frac{1}{x}$$

となる。$\frac{1}{x}$ につく係数を１にする方が煩わしくなく自然である。そのための底として e が求められた。

関数のグラフ（かんすうのぐらふ）

(1) 関数とは

関数 $y = f(x)$ とは、x の値を１つ与えると、y の値が１つ決まる関係をいう。y の値が複数個決まるようなものは関数とはいわない。ただし、異なる x の値に対して y の値が同じであってもかまわない。図４は、y は x の関数というが、図５は言わない。ただし、y と x に対応関係があるので、写像とはいう。

図4

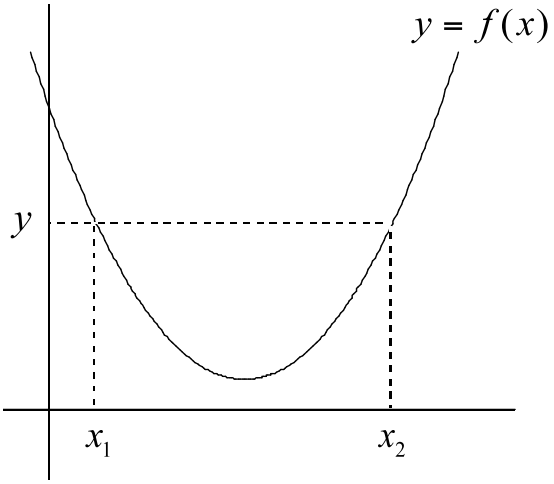
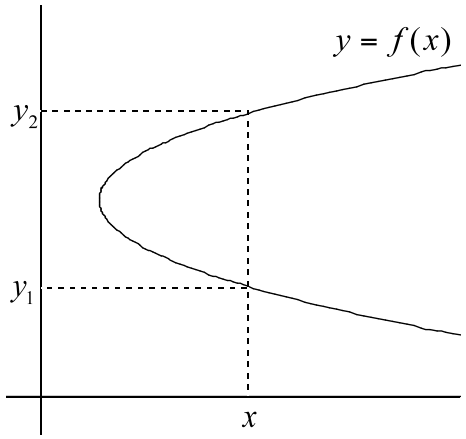


図5



(2) 関数グラフの平行移動

(a) Ｘ軸方向への平行移動

$a > 0$ とする。$y = f(x)$ において x を $x - a$ に置きかえる。 すなわち $y = f(x-a)$ のグラフは、図６のように元のグラフを右方向に a だけ平行移動したグラフになる。もし $y = f(x+a)$ であれば、左方向に a だけ平行移動したグラフになる。

(b) Ｙ軸方向への平行移動

$b > 0$ とする。$y = f(x)$ において y を $y - b$ に置きかえる。すなわち $y = f(x) + b$ のグラフは、図７のように元のグラフを上方向に b だけ平行移動したグラフになる。もし $y = f(x) - b$ であれば、下方向に b だけ平行移動したグラフになる。

図6

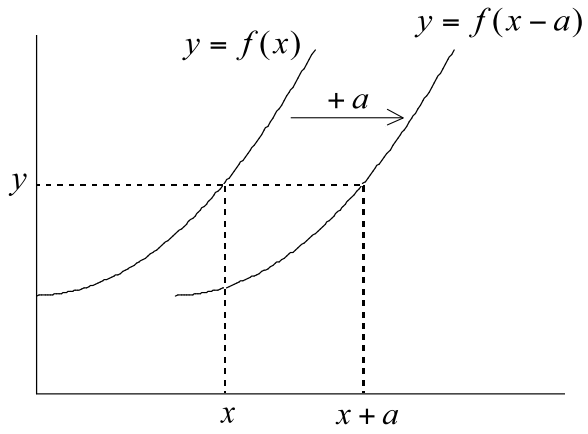
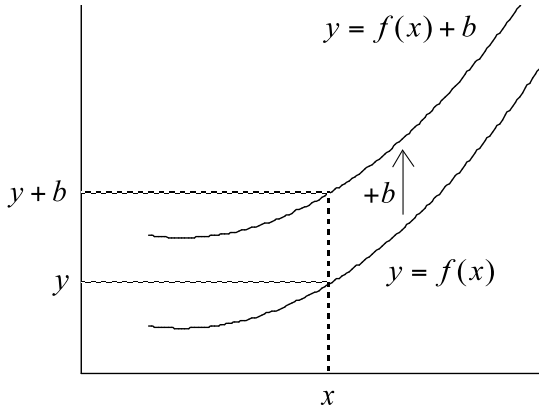


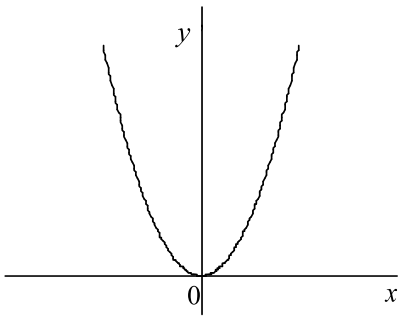
図7



(3) 2次関数

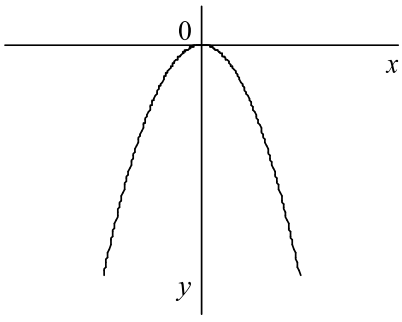
(a) $y = ax^2$のグラフは、$a > 0$ のケースでは図８のように、$a < 0$ のケースでは図９のようになる。この曲線は放物線と呼ばれている。

図8



$a > 0$ のケース

図9



$a < 0$ のケース

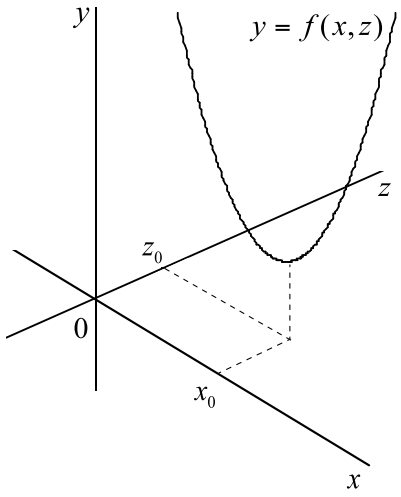
(b) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを描くには、次のように変形する。

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

したがって、$y = ax^2$ のグラフをＸ軸方向に $-\frac{b}{2a}$ 、Ｙ軸方向に $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$ だけ平行移動したグラフになる。

(c) $y = a(x - x_0)^2 + b(z - z_0)^2 + c$ のグラフは、３次元空間における放物面になる。図 10 は $a > 0$ 、$b > 0$ のケースを描いた。方程式は $y = f(x, z)$ と記してある。

図10



３次元空間の図は表現しにくいので、$y = (x-2)^2 + 2(z-1)^2 + 1$のケースで説明しよう。図 11 は、Ｚ軸をある値に固定し、放物面がＸ－Ｙ平面と平行な平面で切られたときにできる曲線が描かれている。$z = 0, 2$と記されている曲線は、$z = 0$と$z = 2$のグラフが重なるからである。そのとき、放物線 $y = (x-2)^2 + 3$になり、そのグラフが描かれている。したがって図 11 では、$z = 0$, 0.5, 1, 1.5, 2 のケースが描

かれている。

同様に、図 12 ではＸ軸をある値に固定し、放物面がＺ－Ｙ平面と平行な平面で切られたときにできる曲線が描かれている。図では $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のケースが描かれている。

図11

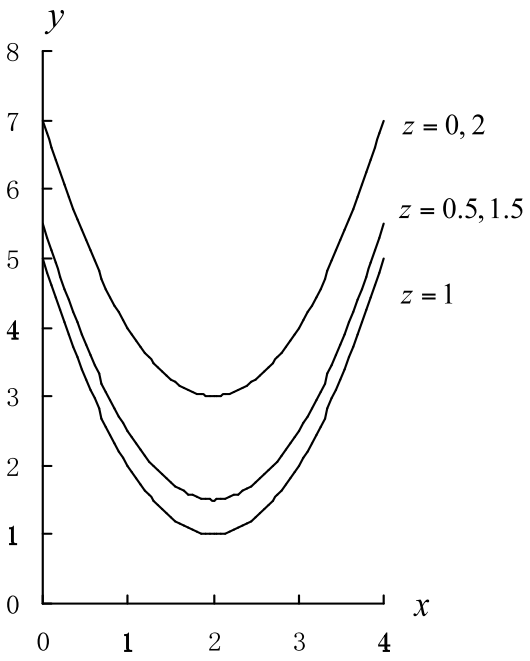
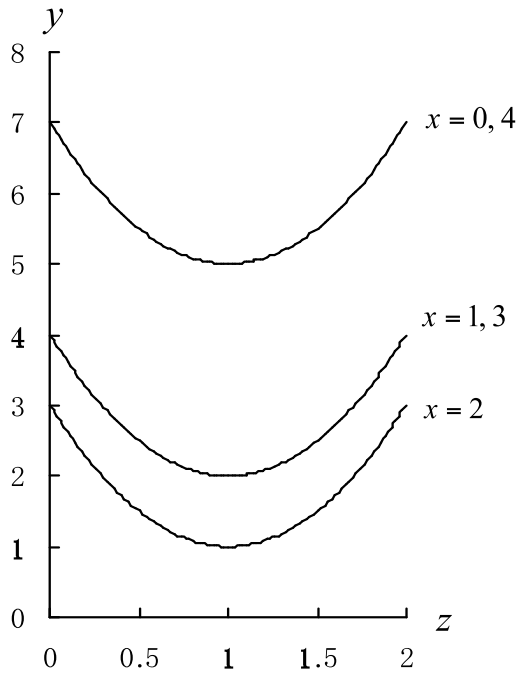


図12



微分（びぶん）

この項は「数学・情報を読むために」の項目「微分・積分」を参照。

(1) 微分係数

$y = f(x)$という関数で値 x が値 $x + \Delta x$ へと Δx だけ変化するとき、それに対応する y が $y + \Delta y$ へと Δy 変化するとしよう。

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

図 13 で点Ａ、Ｂをとおる直線の傾きは

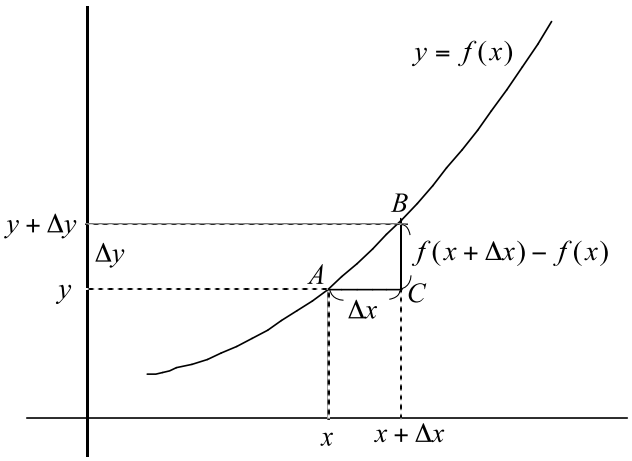
$$\frac{BC}{AC} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

点Ｂが点Ａに限りなく近づくときの直線の傾き、すなわち、点Ａにおける接線の傾きは

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

これを値 x における微分係数とよぶ。また、このような計算を微分とよぶ。

図13



(2) 主な関数の微分

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad \frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$$

$$\frac{d\log_e x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{\log_e a} \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x$$

(3) 主な微分の関係式

$\frac{df(x)}{dx}$ を $f'(x)$と表すことがある。

これを導関数ともいう。

$$\{af(x) + bg(x)\}' = af'(x) + bg'(x)$$

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$[f\{g(x)\}]' = f'\{g(x)\}g'(x)$$

$y = f(z)$ および $z = g(x)$ であるとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{df(z)}{dz}\frac{dg(x)}{dx}$$

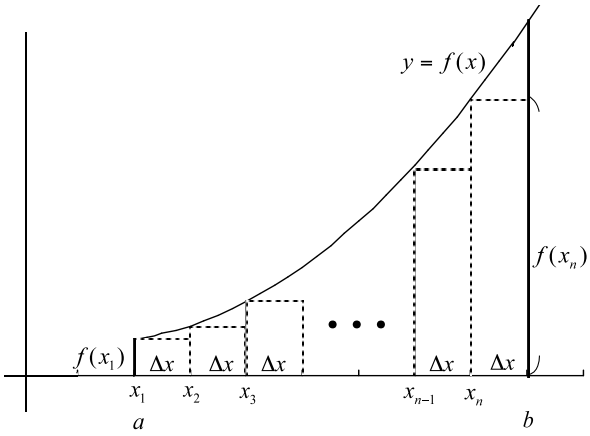
積分（せきぶん）

この項は「数学・情報を読むために」の項目「微分・積分」を参照。

(1) 積分の考え方

$y = f(x)$ という関数で a から b までの定積分をしよう。図 14 では $y = f(x)$ の曲線とX軸（横軸）とからできる図形の面積 S を求めることである。

図14



リーマン積分の考え方では横軸の区間（a , b）を n 等分し、図のような n 個の長方形の面積を求める。

各長方形の横軸の幅は

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

第 i 番目の長方形の高さは $f(x_i)$ である。ただし $x_i = a + (i-1) \times \Delta x$ 。長方形の面積は $f(x_i)\Delta x$ となる。したがって、n 個の長方形の面積合計は

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ここで $n \to \infty$ 、すなわち、$\Delta x \to 0$ のときの面積を $\underline{S}$ とする。$\underline{S}$ は長方形の合計面積が求める面積 S より小さい方から接近した場合である。

長方形の合計面積が求める面積より大きい方から接近した場合を $\overline{S}$ とする。

$\underline{S} = \overline{S}$ のとき、求める面積は $S = \underline{S} = \overline{S}$ であり、

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

と書く。

(2) 積分の関係式

関数 $F(x)$が微分可能であり、

$F'(x) = f(x)$ とする。

定積分は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

不定積分は

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

である。

主な関係式は

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

c を$[a,b]$ 内の点とするとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

部分積分は

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(3) 主な関数の積分

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c & (n \neq -1) \\ \log x + c & (n = -1) \end{cases}$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

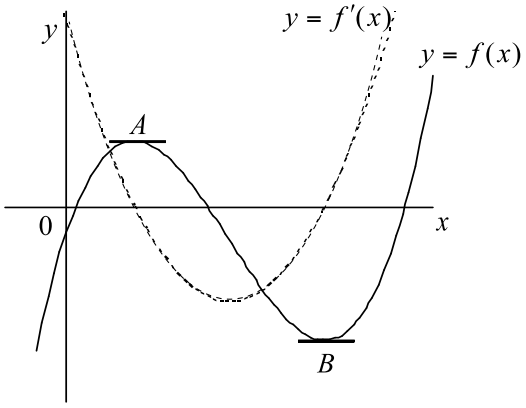
$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

最大値・最小値（さいだいち・さいしょうち）

(1) 極大・極小

図 15 は$y = f(x)$と、その導関数$y = f'(x)$を描いている。この図で導関数の値が 0になるＡ点およびＢ点は極値とよばれる。Ａ点は極大値、Ｂ点は極小値になっている。

図15



(2) 最大・最小

図 15 では、横軸 x のとりうる範囲が定まらないと最大値、最小値は言えない。項目「関数のグラフ」における図８では、$x = 0$ で極小であり最小値をとる。また、図９では $x = 0$ で極大でありで最大値をとる。したがって、導関数が 0 のときに最大値・最小値をとる可能性がある。とくに 2 次関数の場合には、導関数が 0 のとき最大値あるいは最小値になっている。

(3) 2次関数における最大値・最小値

2次関数$y = f(x,z)$の最大値あるいは最小値を求めてみよう。具体的に、$a > 0$ および $b > 0$ であるとき、次の最小値を求める。

$$y = a(x - x_0)^2 + b(z - z_0)^2 + c$$

項目「関数のグラフ」の図 10 をみれば明らかなように、$x = x_0$ および $z = z_0$ のとき y の値は最小になり、$y = c$ が最小値である。

以上のことを機械的に求めよう。項目「関数のグラフ」の図 11 で、z の値を固定して y を x だけの関数として描いた放物線がある。各放物線の最小値のどれかが全体の最小値になる可能性がある。すな

わち、x 以外の変数（この場合には変数 z しかない）を固定し、yを xで微分して 0 とおく。

同様に、図 12 では x の値を固定し、yを z で微分して0とおく。この 2 つの方程式を連立して x 、z の解を求めればよい。

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2a(x - x_0) = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2b(z - z_0) = 0$$

解は $x = x_0$ および $z = z_0$ である。

一般的には

$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial z} = 0$$

これを連立させて解を求める。

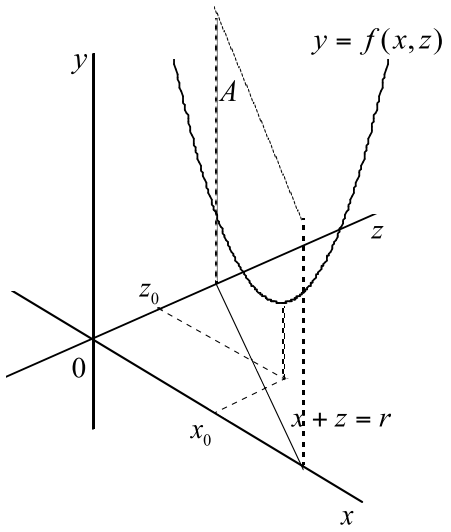
複数の変数があるとき（この例では x と z）、ある変数（例えば x）に注目し、他の変数（例えば z）を固定して、ある変数（x）で微分することを偏微分とよぶ。偏微分の記号としては、∂（ラウンド・ディー）を用いることが普通である。

(4) 制約つき最大値・最小値

前項（３）において、たとえば $x + z = r$ という制約のもとで最小値を求めるとしたら、どうしたらよいであろうか。

項目「関数のグラフ」の図 10 に加えて、Ｘ－Ｚ平面上に $x + z = r$ の直線を描き、その直線をとおりＹ軸に平行な平面Ａを描いた。この平面Ａが放物面を切る断面グラフ上で最小値を求める問題である。図が複雑になるので断面グラフは描いていない。

図16



解法はラグランジュ未定乗数法でおこなう。すなわち

$$Q = (\text{目的関数}) - \lambda \times (\text{制約式})$$

とおき、λ を含めた変数で最大化・最小化を行う。λ はラグランジュ乗数またはラグランジュ係数とよばれる。

前項のケースでは

$$Q = a(x - x_0)^2 + b(z - z_0)^2 + c - \lambda(x + z - r)$$

とする。x 、z、λを変化し Q を最小にする値を求めれば解となる。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2a(x - x_0) - \lambda = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2b(z - z_0) - \lambda = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = x + z - r = 0 \qquad (3)$$

(1)、(2) 式から

$$a(x - x_0) = b(z - z_0) \qquad (4)$$

(3) 式から $z = r - x$ を (4) 式に代入して求めると、

$$x = \frac{ax_0 - bz_0 + br}{a + b}$$

同様に

$$z = \frac{bz_0 - ax_0 + ar}{a+b}$$

一般的には、制約式$r(x,z)=0$のもとで、$y=f(x,z)$ を最小にする問題である。
記号で表現すると

$$\min \quad f(x,z) \qquad \text{s.t.} \quad r(x,z)=0$$

ラグランジュ未定乗数法では

$$Q = f(x,z) - \lambda r(x,z)$$

とおきx、z、λ を変化してQを最小化すればよい。

ここで min は minimum（最小値）あるいは minimization（最小化）の略である。max であれば maximum（最大値）あるいは maximization（最大化）の略。s.t. は subject to（～の条件で）の略である。

⑸ ラグランジュ乗数の意味

例として、効用関数を取り上げよう。第1財をx_1、第2財をx_2だけ消費するときの効用を$u(x_1,x_2)$とする。第1財の価格をp_1、第2財のをp_2とし、所得をyとする。予算制約 $p_1x_1 + p_2x_2 \le y$ の条件で効用を最大化する問題である。

$$Q = u(x_1,x_2) - \lambda(y - p_1x_1 - p_2x_2)$$

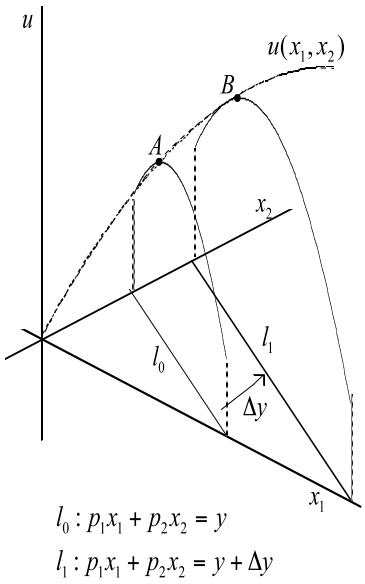
とする。x_1、x_2、λ を変化させてQを最大化して解けばよい。このとき、制約条件である所得yを変化させたときの効用の変化をみよう。x_1、x_2がyによって変化しうるので、yの変化による最適化は

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y} - \lambda\left(1 - p_1\frac{\partial x_1}{\partial y} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial y}\right) = 0$$

と表現される。ここからλを求めることができる。このケースでのλは、所得が1単位変化するときの効用の変化量を表している。

図17では、予算制約線l_0が所得の変化によってl_1にシフトする。それにより、効用がA点からB点に変化する。価格変化のケースも同様にしてλの意味を求めることができる。一般的にラグランジュ乗数は、制約条件の変化により目的関数がどれだけ変化するかを表している。

図17



複利計算（ふくりけいさん）

（1）単利

元金A円を年利率rでt年間預けたときの単利の元利合計Sは

$$S = A(1+rt)$$

（2）複利

元金A円を年利率rでt年間預けたときの複利の元利合計Sは

$$S = A(1+r)^t$$

半年ごとに複利計算をしたときの元利合

計は

$$S = A\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}$$

1年間にn回複利計算をしたときの元利合計は

$$A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

瞬間ごとに複利計算をしたときの元利合計は

$$S = \lim_{n\to\infty} A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = Ae^{rt}$$

この式は項目「指数と対数」を参照。

(3) 現在価値

t年後のA円を年利率rで割り引いたときの現在価値Vは

$$V = \frac{A}{(1+r)^t}$$

t年間にわたり毎年A円の収益があるとき、その合計金額を年利率rで割り引いたときの現在価値Vは

$$V = A\left[\frac{1}{(1+r)}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^t}\right]$$
$$= A\left[\frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t}\right]$$

上式を導くには次の(1)式－(2)式からSを計算すればよい。

$$S = \frac{1}{(1+r)}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^t} \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1+r)}S = \frac{1}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+r)^t}+\frac{1}{(1+r)^{t+1}} \quad (2)$$

(1) － (2) は

$$\left(1-\frac{1}{1+r}\right)S = \frac{1}{(1+r)}-\frac{1}{(1+r)^{t+1}}$$

$$\frac{r}{1+r}S = \frac{(1+r)^t-1}{(1+r)^{t+1}}$$

したがって

$$S = \frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t}$$

毎年A円の収益が永久に続くとき($t\to\infty$)、その合計金額を年利率rで割り引いたときの現在価値Vは

$$V = \frac{A}{r}$$

このような債券をコンソル債ともいう。上式を導くには

$$S = \frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t} = \frac{1-\frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

ここで$1+r>1$であるから

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+r)^t} = 0$$

したがって

$$S = \frac{1}{r}$$