計量経営分析

線形回帰モデル（せんけいかいきもでる）

モデルは現実を理解するために作成するものであり、現実そのものを１００％再現するのではなく、主要な部分を素描すればよい。**回帰モデル**（regression model）では、ある変数を別のいくつかの変数で説明する観点からモデルを作成する。そのさい、説明変数（**独立変数**）がある値をとるとして、その値から少し変化したとき、その程度に比例して被説明変数（**従属変数**）の値も変化すると前提している。説明変数の値が少し変化したとき、被説明変数の値がとてつもなく大きく変化するという複雑系のようなケースは考えていない。

説明変数の値の変化に比例して被説明変数の値が変化するというのは、**一次式**（あるいは**線形式**）で表現される。すなわち、$Y=\alpha+\beta X$のような式である。もしYがXの一次式で表現されず、たとえば$Y=AX^{\beta}$のような場合には、一次式に変形してモデルを構成する。すなわち、両辺の対数をとり $\log Y=\alpha+\beta\log X$ とすれば、$\log Y$は $\log X$の一次式で表現される。

体重Yを他の変数で説明する例を考えよう。説明変数としては、身長Xや食物摂取量Zなどが考えられる。身長と食物摂取量以外の要因は、この２つの説明変数に比べれば些細な影響しか及ぼさないとしよう。ただし、些細な影響を及ぼす要因は数多くあると考えられるので、それらの影響を合計してu という変数で表す。 YはX、Z、u の一次式で表現されるから、$Y=\alpha+\beta X+\gamma Z+u$ と書ける。

変数uは**誤差項**と呼ばれる。数多くの些細な要因 W_1 、W_2 、・・・、W_kが体重に及ぼす影響の合計であるので、

$$u=c_1W_1+c_2W_2+\cdots+c_kW_k$$

と表現できる。身長と食物摂取量がまったく等しい人でも、些細な要因の値はそれぞれ異なっているであろう。したがって、誤差項の値も異なる。すなわち、説明変数X、Zがある特定の値をとるときでも、uの値はいろいろな値をとりうる確率変数である。X、Z が別の値をとれば、uも別の分布に従う確率変数である。説明変数X、Zは確率変数ではないと前提するが、誤差項が確率変数であるので、被説明変数Yも確率変数になる。

誤差項の仮定（ごさこうのかてい）

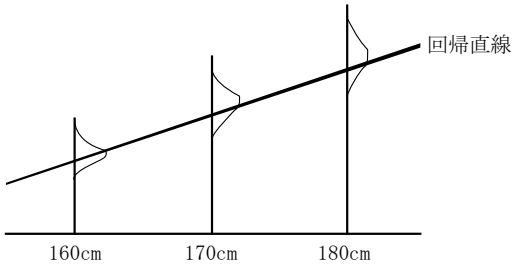
誤差項uは数多くの些細な要因による影響の和として、$u=c_1W_1+c_2W_2+\cdots+c_kW_k$と表現される。その場合、些細な要因は互いに独立であると仮定してよいだろう。もし互いに影響しあっている要因があれば、影響しあっている部分を取り出して、１つの主要な要因として説明変数に加えればよい。些細な要因による影響の分散はそれぞれ小さい。また、互いに独立な要因である。したがって、誤差項の分布は中心極限定理により正規分布に近似される。

正規分布は平均と分散によって、分布の形が定まる。ここで誤差項の平均は０としてよい。もし０でなければ、切片α

を誤差項の平均値だけ移動すれば、誤差項の平均は０になる。

問題は分散である。説明変数の値が異なれば、誤差項の分布も異なるのが一般的である。図１は、身長 160 ㎝、170 ㎝、180 ㎝ごとに体重の分布を表したグラフである。身長ごとに体重の分散は異なる。

図1



したがって、説明変数の値ごとに誤差項の分散を推定しなければならない。その上、係数も推定しなければならないので、推定すべきパラメーターが標本数より多くなり、無理がある。そこで、誤差項の分散は説明変数の値が異なっても、すべて等しいと仮定する。これによって、各誤差項に共通な分散１つと、いくつかの係数を推定すればよい。もし分散が共通でない場合には、共通になるようにモデルを変形すればよい。

上記のほかに、各誤差項は互いに独立であるという条件が必要である。この仮定がないと、係数推定量の分布が計算できない。係数推定量とは、係数推定のための標本を用いた計算式である。標本として観測される被説明変数 $Y_i(i=1,\cdots,n)$ は、観測後は１つの値に定まるが、観測前はいろいろな値をとりうる確率変数である。したがって、標本を用いた計算式も確率変数であり、その分布を知ることによって、係数をどの程度の精度で推定できるかが判断できる。

まとめると、①各誤差項と説明変数は独立（無相関とした方がより正確）である。この条件は、説明変数は確率変数ではないという前提を緩めたものである。②各誤差項の平均は０である。③各誤差項の分散は共通である。④各誤差項は互いに独立である。⑤各誤差項は正規分布に従う。

最小２乗法（さいしょうじじょうほう）

説明変数が１つのケース $Y=\alpha+\beta X+u$ について記述しよう。複数のケースでも、考え方は同じである。ここで知りたいのは、係数 α および β の値と、各誤差項に共通な分散 σ^2 の値である。観測できるのは X と Y の標本の値であり、誤差項の値は観測されない。

例として、体重 Y を身長 X で説明するケースをとりあげよう。n 組の標本 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ が観測される。たとえば図2のようである。

図２

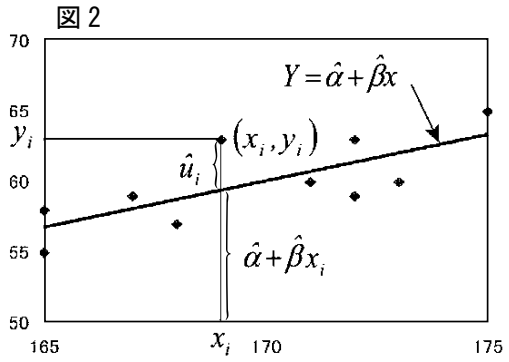


図２では、n 個の標本の状態をもっともよく表現すると考えられる直線を描いてみた。これは真の回帰直線 $y=\alpha+\beta x$ ではなく、標本から推定した回帰直線なので $y=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x$ と係数にハットをつけて区別をする。

i 番目の標本 (x_i,y_i) をみよう。横軸の値が x_i であり、それに対応する推定され

た回帰直線上の値は $\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i\left(=\hat{y}_i\right)$ である。$\hat{y}_i$は**計算値**あるいは**予測値**と呼ばれる。観測値y_iから計算値$\hat{y}_i$を引いた値$\hat{u}_i$を**残差**（residual）という。すなわち

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)$$

残差は誤差項の推定値である。すなわち、説明し残した部分の推定値である。真のα、βに近い$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$を求めるためには、説明し残した部分が全体として小さい方がよいと想定する。プラスとマイナスの残差があるので、n個の残差をそのまま合計すればプラス・マイナスが相殺されて０になる。それを避けるために残差の２乗を合計する。残差２乗和（**残差平方和**：Sum of Squared Residuals）をQとして、それを最小にするような$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$を求める。

$$Q = \hat{u}_1^{\,2} + \cdots + \hat{u}_n^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^{\,2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)\}^2$$

Qの値を最小にするような$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$を求めるには、Qを$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$でそれぞれ偏微分して０とおき、その連立方程式を解けばよい。結果は

$$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\text{XとYの共変動}}{\text{Xの変動}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

である。ここで$\bar{x}$、$\bar{y}$はそれぞれX、Yの標本平均である。

残差２乗和を最小にするように係数を求める方法を最小２乗法という。また、求められた$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$の式を**最小２乗推定量**という。

説明変数が複数のケースについて、最小２乗推定量の特徴を述べよう。

$Y=\alpha+\beta X+\gamma Z+u$の場合、$\hat{\beta}$は$X$以外のすべての説明変数の影響を除いて、$Y$を$X$に回帰した係数に等しい。すなわち、$Y$を$Z$に回帰したときの残差を$Y^*$、$X$を$Z$に回帰したときの残差を$X^*$という変数で表す。$\hat{\beta}$は、$Y^*=\alpha^*+\beta^*X^*+u$を求めたときの$\beta^*$の最小２乗推定量$\hat{\beta}^*$に一致する。この意味で、回帰係数を**偏回帰係数**と呼ぶ。誤差項は元のモデルと変わらない。したがって、元のモデルの記号を用いれば、$Y^*=\alpha^*+\beta X^*+u$となる。

ガウス＝マルコフの定理（がうす＝まるこふのていり）

切片が０、説明変数が１つのケース$y_i=\beta x_i+u_i\left(i=1,\cdots,n\right)$で、最小２乗推定量$\hat{\beta}$の分布を計算してみよう。この式は$x_i=X_i-\bar{X}$、$y_i=Y_i-\bar{Y}$とおけば、$Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$のケースとなる。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$$

①$\hat{\beta}$はn個の被説明変数の一次結合として次のように表現できる。これを**線形性**という。

$$\hat{\beta} = \left(\frac{x_1}{\sum x_i^{\,2}}\right) y_1 + \cdots + \left(\frac{x_n}{\sum x_i^{\,2}}\right) y_n$$

②$\hat{\beta}$の分子を$y_i=\beta x_i+u_i$でおきかえると

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i(\beta x_i + u_i)}{\sum x_i^{\,2}} = \beta + \frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^{\,2}}$$

$$= \beta + \left(\frac{x_1}{\sum x_i^{\,2}}\right) u_1 + \cdots + \left(\frac{x_n}{\sum x_i^{\,2}}\right) u_n$$

説明変数と誤差項は独立であり、また、

各誤差項の平均は０であるから、$\hat{\beta}$ の期待値は $E(\hat{\beta})=\beta$ となる。すなわち、β の分布の平均は、推定したい係数 $\hat{\beta}$ に等しい。これを**不偏性**という。

③各誤差項は互いに独立であり、その分散は共通に σ^2 であるという条件を用いて、$\hat{\beta}$ の分散を計算できる。

$$V(\hat{\beta})=V(\beta)+\left(\frac{x_1}{\sum x_i^2}\right)^2 V(u_1)$$

$$+\cdots+\left(\frac{x_n}{\sum x_i^2}\right)^2 V(u_n)$$

$$=0+\left(\frac{x_1}{\sum x_i^2}\right)^2\sigma^2+\cdots+\left(\frac{x_n}{\sum x_i^2}\right)^2\sigma^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

④ $\hat{\beta}$ は、②の式より、互いに独立で正規分布に従う誤差項 $u_1,\cdots,u_n$ の一次結合として表現される。したがって、$\hat{\beta}$ も正規分布に従う。すなわち、

$$\hat{\beta}\sim \mathrm{N}\left(\beta,\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right)$$

$Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$ のケースでは

$$\hat{\beta}\sim \mathrm{N}\left(\beta,\frac{\sigma^2}{\sum (X_i-\bar{X})^2}\right)$$

である。

「誤差項の仮定」の項目で述べた ①～④の条件が成立するとき、線形性、不偏性を満たす係数推定量のうちで分散が最小になるのは、最小２乗推定量であることを証明できる。これをガウス＝マルコフの定理という。この意味で、最小２乗推定量は良い推定量である。ガウス＝マルコフの定理では、⑤の正規性の仮定は不要である。ただし、正規性の条件を満たすと、いろいろな検定を行うことができる。

残差分析（ざんさぶんせき）

最小２乗法を用いて回帰式を求めるとき、求められたものが良い説明式であるかどうかを検討しよう。説明変数が１つのケースをとりあげる。例として、都道府県別のデータで、卸売業の年間商品販売額 Y を事業所数 X に回帰するモデル $Y=\alpha+\beta X+u$ をみよう。図３はデータをプロットし、推定された回帰直線を描いたグラフである。

図３

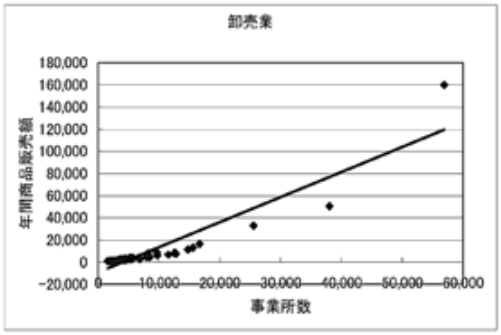
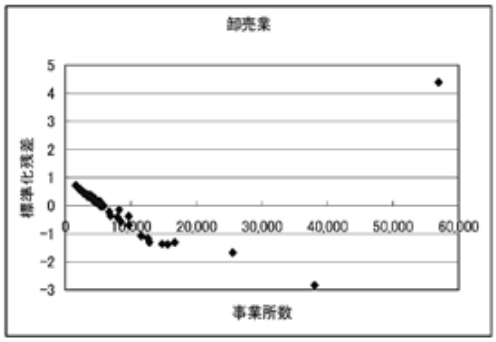


図４は横軸に事業所数を、縦軸に標準化残差をプロットしたグラフである。

図４



標準化残差とは、残差を誤差項の**標準誤差**、すなわち誤差項の標準偏差の推定値で割った値である。

図４をみると、残差には明らかに規則的な動きの部分がある。規則的な動きをする要因は誤差項に含めるのではなく、説明変数として明示するのが良いモデル

である。したがって、図４のケースは良いモデルとは言えない。

次に両辺の対数をとった

$$\log Y=\alpha+\beta\log X+u$$

のケースをみよう。図５の横軸は常用対数で表した $\log X$ の値を、縦軸は $\log Y$ の値をプロットし、推定された回帰直線を描いている。図６は横軸が $\log X$、縦軸が標準化残差である。図６では、残差に規則性があるようにはみえない。したがって、良いモデルであるように考えられる。

図５

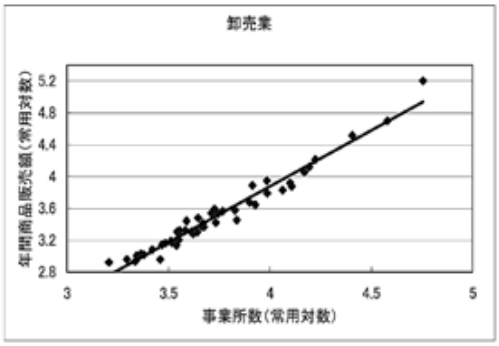
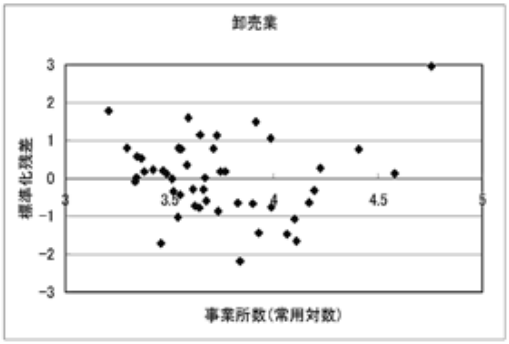


図６



残差は誤差項の推定値であるので、「誤差項の仮定」の項目で述べた①～⑤を満たしていることが望ましい。各誤差項と説明変数は独立であるという条件①を残差グラフから判断することは難しいが、条件②～⑤については残差グラフから総合的に判断することができるであろう。

各誤差項は互いに独立に０を中心に正規分布をする。したがって、標準化残差の大部分は−２から２までの間に万遍なくプロットされている。この範囲を超えて、−３から３までの間には全体の約５％の点がプロットされる。また、−３以下および３以上のところにプロットされる点はない。

図６をみると、−２から−３および２から３の間にプロットされている点は、４７個のうちの２個である。また、−２から２の間に万遍なく点がプロットされているので、良いモデルと判断する。

説明変数が複数ある場合には、残差グラフの横軸として予測値をとるのがよいであろう。

正規分布から導かれる分布（せいきぶんぷからみちびかれるぶんぷ）

平均０、分散１の正規分布を**標準正規分布**という。確率変数 X が標準正規分布に従うとする。$E(X)=0$、$V(X)=1$。ここで X^2 の分布を考える。この分布の平均は１、分散は２になる。というのは、このケースでは

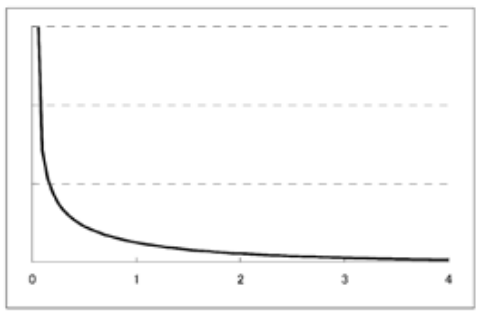
$$V(X)=E(X^2)=1$$

となる。また、

$$V(X^2)=E\{(X^2-1)^2\}$$
$$=E(X^4)-2E(X^2)+1=2。$$

ここで、$E(X^4)=3$ を用いた。確率分布は図７のようになる。

図７　　自由度1のカイ2乗分布



平均 1、 分散 2

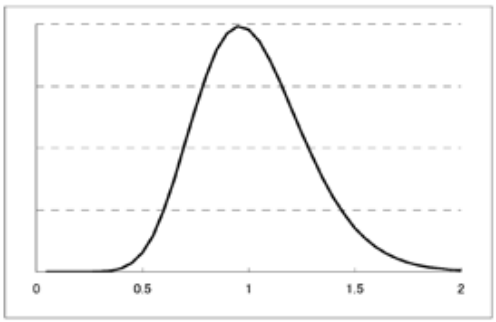
（1）**カイ２乗分布**

$X_1,\cdots,X_f$は互いに独立で標準正規分布に従うとする。そのとき、２乗和の分布 $Y=X_1^2+\cdots+X_f^2$は自由度 f の χ^2分布（カイ２乗分布）に従う。記号で $Y\sim\chi^2(f)$ と書こう。この分布の平均は f 、分散は $2f$ である。

χ^2分布は自由度が大きくなると、中心極限定理により正規分布に近づく。

$Y\sim\chi^2(f)$のとき、$\frac{Y}{f}$ の分布の平均は１、分散は $\frac{2}{f}$である。図８は $\frac{\chi^2(30)}{30}$ の分布である。正規分布に近く、１付近の値に分布している。

図８　$\frac{\chi^2(30)}{30}$ の分布

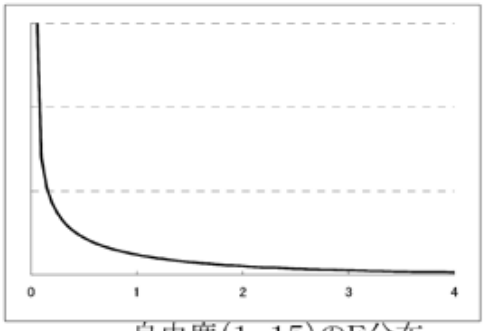


平均１、分散 $\frac{2}{30}$

（2）**Ｆ分布**

Y_1、Y_2は互いに独立で自由度f_1、f_2 の χ^2 分布に従うとする。そのとき、$F=\frac{Y_1/f_1}{Y_2/f_2}$ は自由度 (f_1,f_2)のＦ分布に従う。図９は自由度（１，１５）のＦ分布である。

図９



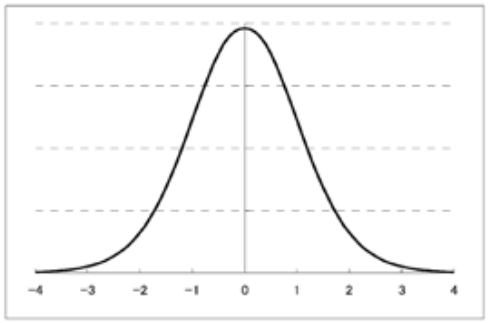
自由度(1, 15)のF分布

分母の自由度が大きくなると、分母の値はほとんど１付近の値をとる。したがって、分子の分布 Y_1/f_1 に近い形になる。図９を図７と比較してみると似ていることが分かる。

（3）**ｔ分布**

Xは標準正規分布、Y は自由度 fの χ^2 分布に従い、互いに独立であるとする。$t=\frac{X}{\sqrt{Y/f}}$ は自由度fのｔ分布に従う。自由度が大きくなると、ｔ分布は標準正規分布に近づく。図１０は自由度１４のｔ分布である。

図 10



自由度１４のｔ分布

決定係数（けっていけいすう）

切片が０、説明変数が１つのケース $y_i=\beta x_i+u_i\,(i=1,\cdots,n)$で、最小２乗法の考え方を幾何学的に説明しよう。

$x_i=X_i-\bar{X}$ 、$y_i=Y_i-\bar{Y}$ とおけば、$Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$となる。

$$\mathsf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}\quad \mathsf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\quad \mathsf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}$$

モデルはベクトルを用いて、

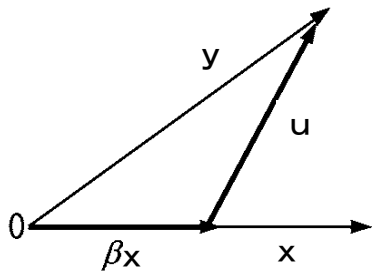
$\mathsf{y}=\beta\mathsf{x}+\mathsf{u}$

と書ける。これをグラフで表したのが図１１である。ここで、

$|\mathbf{u}|^2=u_1^2+\cdots+u_n^2$

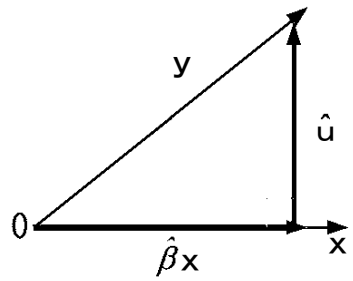
である。

図 11



ベクトルｘ、ｙが観測されたのち、残差２乗和$|\hat{u}|^2$を最小にするように$\hat{\beta}$を求めるためには、図１２のように、$\hat{u}$ ベクトルの長さを最小にするように$\hat{\beta}x$を決めればよい。

図 12



したがって、$\hat{u}$ ベクトルとｘベクトルは直交する。ピタゴラスの定理により、

$|y|^2=|\hat{\beta}x|^2+|\hat{u}|^2$

各成分で表現すると

$$\sum y_i^{\,2}=\hat{\beta}^2\sum x_i^{\,2}+\sum \hat{u}_i^{\,2}$$

切片が０でないモデルでは

$$\sum (y_i-\bar{y})^2=\hat{\beta}^2\sum (x_i-\bar{x})^2+\sum \hat{u}_i^{\,2}$$

言葉で記述すると、

総変動＝（回帰変動）＋（残差変動）

総変動は説明されるべき変動、回帰変動は説明できた変動、残差変動は説明し残した変動といえる。したがって、説明できた割合（決定係数）は

$$\text{決定係数}=\frac{\text{回帰変動}}{\text{総変動}}$$

と表現できる。決定係数は０から１までの値をとる。

例として、男子学生１７００人のデータを用いて体重を身長に回帰した結果、決定係数は0.280であった。この場合、体重は身長によって説明できたと言えるであろうか。同じデータを用いて、身長を１cm刻みに２４組の階級に分け、各階級に属する人の体重の平均を求めた。２４組の集計された身長と体重のデータを用いて回帰したところ、決定係数は0.975になった。この場合には、説明できたと言ってよいであろう。ということは、１７００人のデータの場合にも、説明できていると考えた方がよいことになる。決定係数がいくらであったら説明できたと言えるかは、標本数や分析目的によって判断すべきである。

誤差分散（ごさぶんさん）

（１）正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から n 個の標本を抽出する。

$$X_i \frown N(\mu,\sigma^2) \quad (i=1,\cdots,n)$$

これを基準化したものは標準正規分布に従う。

$$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \frown N(0,1) \quad (i=1,\cdots,n)$$

標本は互いに独立であるから、この２乗和は自由度 n のχ^2分布に従う。

$$\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \frown \chi^2(n)$$

ここで

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+n(\bar{X}-\mu)^2$$

が言える。したがって

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}+\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

標本平均の分布は $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$ であるから、右辺第２項は自由度１のχ^2分布に従う。また、右辺の二項は互いに独立であるから、右辺第１項は自由度 $n-1$ のχ^2分布に従う。その期待値は $n-1$ である。それゆえ

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\right)=n-1$$

であるから

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}\right)=\sigma^2$$

したがって、分散の不偏推定量として

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$$

を用いる。

（２）説明変数が１つのケース

$$Y=\alpha+\beta X+u$$

について記述しよう。

$$y_i=\alpha+\beta x_i+u_i$$
$$\bar{y}=\alpha+\beta\bar{x}+\bar{u}$$
$$y_i=\hat{y}_i+\hat{u}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i+\hat{u}_i$$
$$\bar{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\bar{x}\quad\text{（正規方程式より）}$$

以上、４つの式から

$$u_i-\bar{u}=(\hat{\beta}-\beta)(x_i-\bar{x})+\hat{u}_i$$

が成り立つ。両辺を２乗して、$i=1,\cdots,n$ を合計しよう。説明変数ベクトルと残差ベクトルは直交するから、内積は０になる。したがって、$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\hat{u}_i=0$ である。

この式を用いると

$$\sum(u_i-\bar{u})^2$$
$$=(\hat{\beta}-\beta)^2\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum\hat{u}_i^2$$

両辺を誤差項の分散 σ^2 で割ると

$$\frac{\sum(u_i-\bar{u})^2}{\sigma^2}$$
$$=\frac{(\hat{\beta}-\beta)^2\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}+\frac{\sum\hat{u}_i^2}{\sigma^2}$$

ここで、左辺は（１）から自由度 $n-1$ のχ^2分布に従う。右辺第１項は「ガウス＝マルコフの定理」の項目で示した $\hat{\beta}$ の分布から、自由度１のχ^2分布に従う。右辺の二項は互いに独立であるから、右辺第２項は自由度 $n-2$ のχ^2分布に従う。

一般的に説明変数が p 個あるケース

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{1i}+\cdots+\beta_px_{pi}+u_i$$

では、残差平方和（ＳＳＲ）を誤差項の分散で割ったものは、自由度 $(n-p-1)$ のχ^2分布に従う。

$$\frac{SSR}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-p-1)$$

したがって、誤差項の分散の不偏推定量として

$$s^2=\frac{SSR}{n-p-1}$$

を用いる。

Ｆ統計量（えふとうけいりょう）

「決定係数」の項目で、

$$\sum(y_i-\bar{y})^2$$
$$=\hat{\beta}^2\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum\hat{u}_i^2\qquad\text{(A)}$$

が成立することを述べた。また、「誤差分散」の項目で

$$\sum(u_i-\bar{u})^2$$

$$=(\hat{\beta}-\beta)^2\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum\hat{u}_i^2 \quad \text{(B)}$$

であることを示した。（B）式で $\beta=0$ とおくと、（A）式が導かれる。一般的に説明変数が p 個あるケースでは、

$$\beta_1=\cdots=\beta_p=0$$

とおけば、（B）式から（A）式が導き出される。それゆえ（A）式では、説明変数の係数がすべて０であるという仮説を立てたときに、その仮説がデータから棄却されるかどうかをみるために用いられることになる。ただし、決定係数の場合には、分母・分子が独立ではないので、分布を計算できない。それゆえ検定ができない。

回帰変動と残差変動の比であれば、分母・分子が独立になり、分布が計算できる。説明変数がｐ個のケースでは

$$\frac{\text{回帰変動}/p}{\text{残差変動}/(n-p-1)}$$

$$\sim \text{自由度}(p,n-p-1)\text{のF分布}$$

となる。この値をＦ統計量（**Ｆ値**）という。

男子１７００人のデータを用いて体重を身長に回帰させた例では、回帰変動＝23057、残差変動＝59247で、自由度は（１，1698）である。したがって、Ｆ統計量は

$$\frac{23057\div 1}{59247\div 1698}=661$$

自由度（１，1698）のＦ分布で、661以上の値が出る確率（Ｐ値）は0.000である。したがって、説明変数の係数がすべて０であるという仮説は棄却される。ということは、全体として説明ができているということになる。

ｔ統計量（てぃーとうけいりょう）

説明変数が２つのケースで説明しよう。例として、資本 K と労働 L を投入し、生産量 Y を産出する生産関数をとりあげる。モデルは、両辺の対数をとり、

$$\log Y=\alpha+\beta\log K+\gamma\log L+u$$

である。四半期データで、標本数は５３とする。 $\log Y$ を $\log L$ に回帰したとき、決定係数が0.281と小さかったので、はたして $\log L$ は説明変数として役に立っているのだろうか。

もし $\gamma=0$ であるならば、$\log L$ は $\log Y$ の説明には役立っていない。

$\gamma\neq 0$ ならば、説明に寄与していると考える。したがって、

帰無仮説 H_0：　$\gamma=0$

対立仮説 H_1：　$\gamma\neq 0$

「最小２乗法」の項目における偏回帰係数で説明したように、γ の最小２乗推定量は $\log Y$ および $\log L$ から $\log K$ の影響を除いて回帰した推定量に等しい。ここでは、$\log L$ を $\log K$ に回帰したときの残差の変動を「変動」と呼ぼう。また、誤差項の分散を σ^2 とする。「ガウス＝マルコフの定理」の項目にある $\hat{\beta}$ の分布を参考にすると、$\hat{\gamma}$ の分布は正規分布で

$$\hat{\gamma}\sim N\left(\gamma,\frac{\sigma^2}{\text{変動}}\right)$$

と表現される。これを基準化すると

$$\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\text{変動}}}}\sim N(0,1)$$

σ^2 は観測されないから、分散の推定量 s^2 でおきかえる。$\frac{s}{\sqrt{\text{変動}}}$ は $\hat{\gamma}$ の標準誤差と呼ばれる。

$$\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{\hat{\gamma}\text{の標準誤差}}=\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{\sqrt{\frac{s^2}{\text{変動}}}}=\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$$

ただし

$$\text{分子}=\frac{\hat{\gamma}-\gamma}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\text{変動}}}}\sim N(0,1)$$

$$\text{分母}=\sqrt{\frac{\frac{SSR}{\sigma^2}}{n-p-1}}\sim\sqrt{\frac{\chi^2\text{分布}}{\text{自由度}}}$$

これは自由度 $(n-p-1)$ の t 分布に従う。ここで、n は標本数、p は説明変数の数である。

帰無仮説 $\gamma=0$ の場合、

$$t\text{統計量（t値）}=\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}\text{の標準誤差}}$$

$$\sim\text{自由度}(n-p-1)\text{の}t\text{分布}$$

生産関数の例では、γ の推定値は0.779、標準誤差は0.201、t 統計量は3.88であった。自由度５０の t 分布で、3.88以上あるいは-3.88以下になる確率（Ｐ値）は0.000である。したがって、帰無仮説は棄却される。それゆえ、労働投入量は生産量の説明に寄与している。